

# GEOMETRIE PLANA

## Segmente, semidrepte, semiplane

**Def** Se numeste segment, o portiune de dreapta marginita de doua puncte numite capetele sau extremitatile segmentului.

**Desen** 

**Notatie**  $[AB]$  segment inchis- isi contine capetele (  $A, B \in [AB]$  )

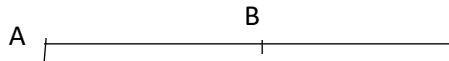
$(AB)$  segment deschis- nu isi contine capetele (  $A, B \notin (AB)$  )

**Def** Doua segmente sunt identice, daca prin suprapunere coincid. (au aceleasi puncte)

**Desen** 

$(AB) = (CD)$

**Def** Se numeste semidreapta, o portiune de dreapta marginita de un punct numit originea semidreptei.

**Desen** 

**Notatie**  $[AB]$  semidreapta inchisa- isi contine originea (  $A \in [AB]$  )

$(AB)$  semidreapta deschisa- nu isi contine originea (  $A \notin (AB)$  )

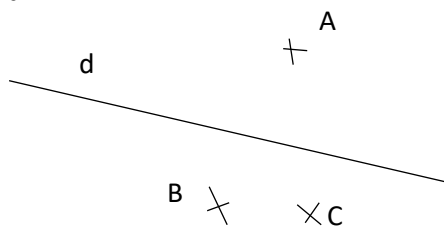
**Def** Doua semidrepte sunt identice, daca prin suprapunere coincid. (au aceleasi puncte)

**Desen**   
 $[AB] = [AC]$

**Def** Doua semidrepte sunt opuse, daca au aceeasi origine, aceeasi dreapta suport, dar sunt diferite.

**Desen**   
 $[BA]$  si  $[BC]$  sunt semidrepte opuse

**Def** Se numeste semiplan, o portiune de plan marginita de o dreapta, numita marginea semiplanului.

**Desen**   
A si B sunt de o parte si de alta a dreptei d  
B si C sunt de aceeaasi parte a dreptei d

semiplanele  $(dA)$  si  $(dB)$  sunt opuse

semiplanele  $(dB)$  si  $(dC)$  sunt identice;  $(dB) = (dC)$

**Notatie**  $dA$  semiplanul închis- își conține marginea ( $d \subset [dA)$ )

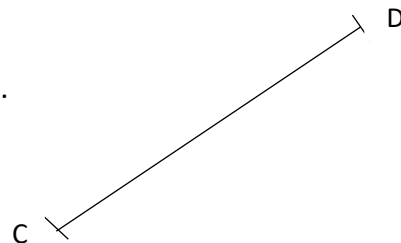
( $dA$  semiplan deschis- nu își conține marginea ( $d \not\subset (dA)$ )

**Def** Se numește lungimea unui segment, un număr care ne arată de câte ori se cuprinde o unitate de măsură aleasă (cm, mm,...) într-un segment dat.

**Notatie**  $AB=4\text{cm}$  

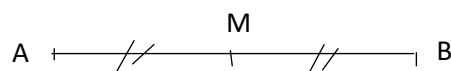
**Def** Două segmente sunt congruente, dacă au aceeași măsură.

**Notatie**  $(AB) \equiv (CD)$  sau  $AB=CD=4\text{cm}$



**Def** Se numește mijlocul unui segment, un punct din interiorul acestuia, care îl împarte pe acesta în două segmente congruente.

M este mijlocul  $[AB] \Rightarrow [MA] \equiv [MB]$



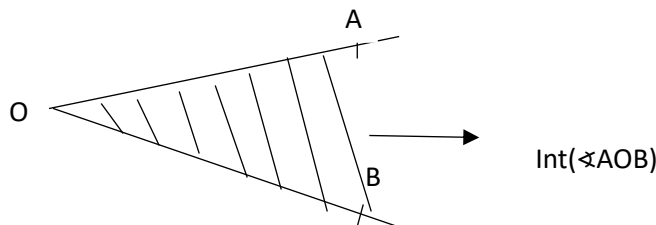
**Def** Se numește distanța dintre 2 puncte, lungimea segmentului dintre cele 2 puncte.

**Notatie**  $d(A,B)=AB$  „distanța dintre A și B este lungimea segmentului AB”

### Unghiuri

**Def** Se numește unghi, figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine. Semidreptele se numesc laturile unghiului, iar originea lor se numește vârful unghiului.

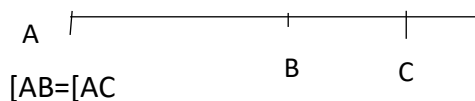
**Desen**



**Notatie**  $\angle AOB$ ;  $\angle O$ ;  $\angle BOA$

**Def** Se numește unghi nul, unghiul format din 2 semidrepte identice.

**Desen**



$\angle BAC$  este unghi nul;  $m(\angle BAC)=0^\circ$

**Def** Se numește unghi alungit, unghiul format din 2 semidrepte opuse. Prin definiție măsura unui unghi alungit este de  $180^\circ$ .

**Desen**



$[BA]$  și  $[BC]$  sunt semidrepte opuse

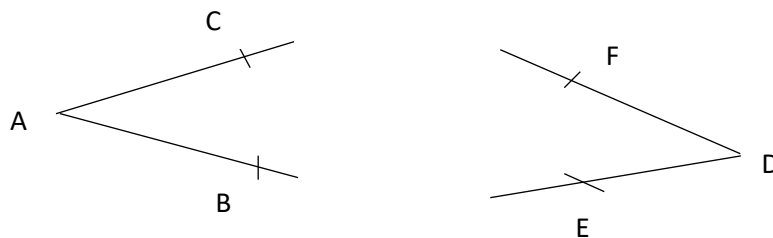
$\angle ABC$  este unghi alungit;  $m(\angle ABC)=180^\circ$

$1^0 = 60'$  ( minute)

$1' = 60''$  (secunde)

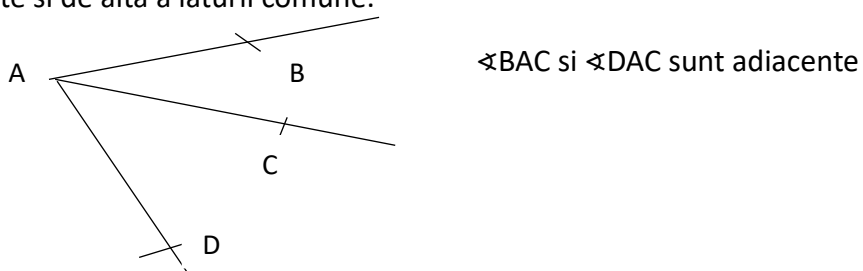
**Def** 2 unghiuri sunt congruente daca masurile lor sunt egale.

**Desen**



**Notatie**  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$  sau  $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle EDF)$

**Def** 2 unghiuri sunt adiacente, daca au acelasi varf, o latura comuna, iar laturile necomune sunt de o parte si de alta a laturii comune.

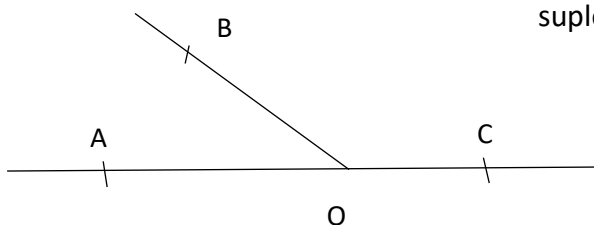


**Def** 2 unghiuri sunt suplementare daca suma masurilor lor este de  $180^0$ .

**Def** 2 unghiuri sunt complementare daca suma masurilor lor este de  $90^0$ .

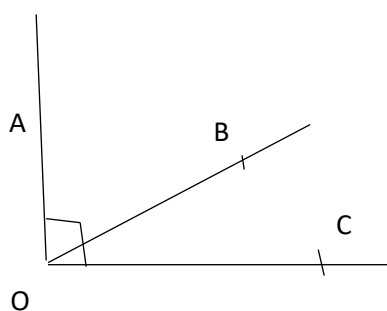
**Ex**

$\sphericalangle AOB$  si  $\sphericalangle BOC$  sunt unghiuri adiacente  
suplementare



**Ex**

$\sphericalangle AOB$  si  $\sphericalangle BOC$  sunt unghiuri adiacente  
complementare



**Def** Se numeste bisectoarea unui unghi, o semidreapta cu originea in varful unghiului, care il imparte pe acesta in 2 unghiuri congruente.

**Clasificarea unghiurilor:** -unghiuri ascutite- au masurile mai mari de  $0^0$  si mai mici de  $90^0$

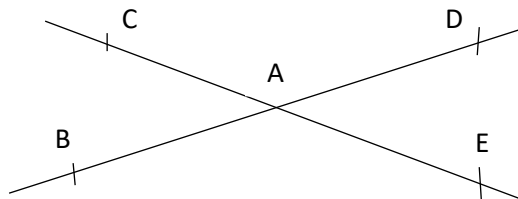
-unghiuri drepte- au masurile de  $90^0$

-unghiuri obtuze- au masurile mai mari de  $90^0$  si mai mici de  $180^0$

**Def 2** unghiuri sunt opuse la varf, daca au acelasi varf, iar laturile unuia sunt in prelungirea laturilor celuilalt unghi.

**Teorema** Unghiurile opuse la varf sunt congruente.

**Desen**



$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAE$  sunt unghiuri opuse la varf

$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAE$  sunt unghiuri opuse la varf

**Teorema** Suma masurilor unghiurilor formate in jurul unui punct este de  $360^\circ$ .

### Triunghiul

**Clasificarea triunghiurilor: -dupa laturi:** -triunghi oarecare sau scalen-laturile au lungimi diferite

-triunghi isoscel- are 2 laturi congruente

-triunghi echilateral- are toate laturile congruente

**-dupa unghiuri:**-triunghi ascutitunghic- are toate unghiurile ascutite

-triunghi dreptunghic- are un unghi drept

-triunghi obtuzunghic- are unghi obtuz

**Def** Laturile care formeaza unghiul drept al unui triunghi dreptunghic se numesc catete, iar latura care se opune unghiului drept se numeste ipotenuza.

**Def** Se numeste perimetrul unui triunghi suma lungimilor laturilor triunghiului.

**Teorema** Suma masurilor unghiurilor unui triunghi este de  $180^\circ$ .

### Congruenta triunghiurilor

**Def** Doua triunghiuri sunt congruente daca au toate laturile si toate unghiurile respectiv congruente.

#### Cazurile de congruenta ala triunghiurilor oarecare

**Cazul L.U.L.** Daca 2 triunghiuri au 2 laturi si unghiul dintre ele respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

**Cazul U.L.U.** Daca 2 triunghiuri au 2 unghiuri si latura dintre ele respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

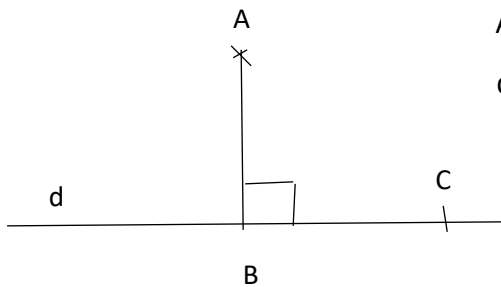
**Cazul L.U.U.** Daca 2 triunghiuri au o latura, un unghi alaturat acesteia si unghiul opus laturii respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

**Cazul L.L.L.** Daca 2 triunghiuri au toate laturile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

## Drepte perpendiculare

**Def** Doua drepte sunt perpendiculare daca sunt concurente si la intersectie formeaza un unghi drept.

**Def** Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea segmentului perpendicular dus din punct pe dreapta.



$AB = d(A, d)$  „AB este distanța de la A la dreapta d”

dacă  $C \in d$  atunci  $d(C, d) = 0$

$B = \text{pr}_d A$  „B se numește **proiecția** punctului A pe dreapta d”

**Teorema** Dintr-un punct exterior unei drepte, se poate duce o singură perpendiculară pe acea dreaptă.

**Teorema** Perpendiculara dusă dintr-un punct pe o dreaptă este mai „scurtă” decât orice oblică.

## Cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice

**Cazul I.C.** Dacă 2 triunghiuri dreptunghice au ipotenuza și o catetă respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

**Cazul C.C.** Dacă 2 triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

**Cazul I.U.** Dacă 2 triunghiuri dreptunghice au ipotenuza și un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

**Cazul C.U.** Dacă 2 triunghiuri dreptunghice au o catetă și un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

## Linii importante în triunghi

### 1) Bisectoarea

**Def** Se numește bisectoarea unui unghi semidreaptă care împarte unghiul în două unghiuri congruente.

**Teorema1** Un punct este pe bisectoarea unui unghi dacă și numai dacă el este egal departat de laturile unghiului.

**Teorema2** Cele 3 bisectoare ale unghiurilor unui triunghi se intersectează în același punct, notat cu I și numit centrul cercului înscris în triunghi (cercul care atinge toate laturile triunghiului în câte un punct) .

### 2) Mediatoarea

**Def** Se numește mediatoarea unui segment, dreaptă perpendiculară pe mijlocul segmentului.

**Teorema1** Un punct este pe mediatoarea unui segment dacă și numai dacă el este egal departat de capetele segmentului.

**Teorema2** Cele 3 mediatoare ale laturilor unui triunghi se intersecteaza in acelasi punct, notat cu **O** si numit centrul cercului circumscris unui triunghi (cercul care trece prin toate varfurile triunghiului).

**Obs1** Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei, raza acestui cerc fiind jumătate din ipotenuza.

**Obs2** Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic este in exteriorul triunghiului.

### 3) Mediana

**Def** Se numeste mediana unui triunghi, segmentul care uneste un varf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse acestuia.

**Teorema** Cele 3 mediane ale unui triunghi se intersecteaza in acelasi punct, notat cu **G** si numit centrul de greutate al triunghiului.

**Obs1** Intr-un triunghi dreptunghic, mediana din varful unghiului drept este jumătate din ipotenuza, pentru ca este raza in cercul circumscris triunghiului.

**Obs2** Centrul de greutate al unui triunghi se gaseste la  $\frac{2}{3}$  de varf si la  $\frac{1}{3}$  de baza, pe mediana.

### 4) Inaltimea

**Def** Se numeste inaltime intr-un triunghi dreapta care trece printr-un varf al triunghiului si este perpendiculara pe latura opusa acestuia.

**Teorema** Cele 3 inaltimi ale unui triunghi se intersecteaza in acelasi punct, notat cu **H** si numit ortocentrul triunghiului.

**Obs1** Ortocentrul unui triunghi dreptunghic este varful unghiului drept, pentru ca doua dintre inaltimi sunt chiar catetele.

**Obs2** Ortocentrul unui triunghi obtuzunghic este in exteriorul triunghiului, pentru ca doua dintre inaltimi "cad" pe prelungirile laturilor.

### Aria unui triunghi

**Def** Se numeste aria unui triunghi jumătate din produsul dintre o latura a triunghiului si inaltimea corespunzatoare acestuia.

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$

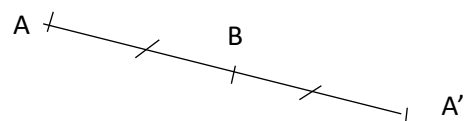
$$A_{\Delta \text{ dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{ip \cdot h}{2}$$

**Obs** Mediana unui triunghi il imparte pe acesta in 2 triunghiuri de arii egale.

### Simetria fata de un punct

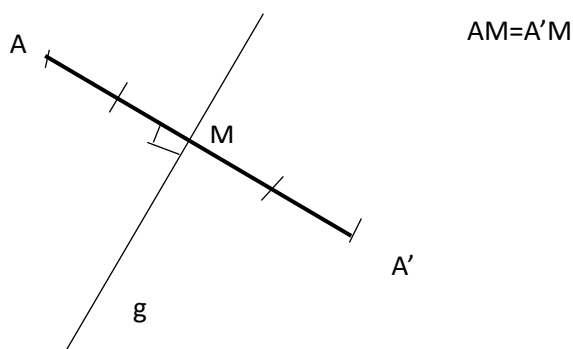
**Def** Simetricul unui punct A fata de un alt punct B este un punct A' coliniar cu A si cu B, cu proprietatea ca  $AB = A'B$ .

**Not**  $A' = \text{sim}_B A$  ("A' este simetricul lui A fata de B")



### Simetria fata de o dreapta

**Def** Simetricul unui punct A fata de o dreapta g este un punct A' cu proprietatea ca  $AA' \perp g$  si distantele de la A si A' la dreapta g sunt egale.

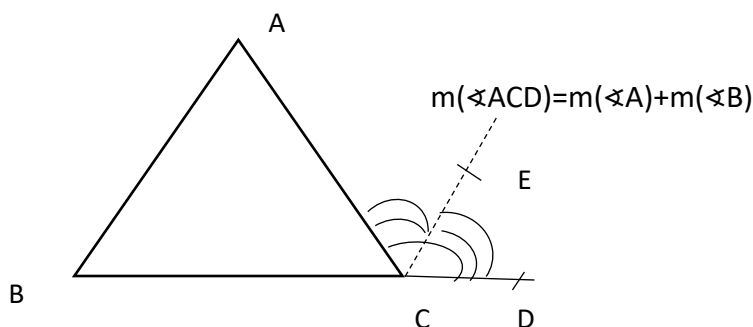


**Not**  $A' = \text{sim}_g A$  ("A' este simetricul lui A fata de dreapta g")

### Unghi exterior unui triunghi

**Def** Se numeste unghi exterior unui triunghi, un unghi adiacent si suplementar cu unul din unghiurile triunghiului.

**Teorema** Masura unui unghi exterior al unui triunghi este egala cu suma masurilor unghiurilor triunghiului, neadiacente lui.



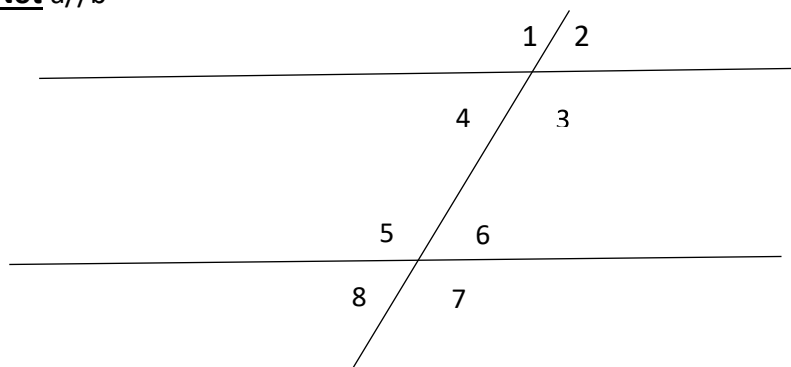
**Def** Se numeste bisectoare exterioara, bisectoarea unui unghi exterior. (CE bisectoare exterioara

### Drepte paralele

**Def** Doua drepte sunt paralele daca nu se intalnesc oricat le-am prelungi.

**Axioma paralelelor** Intr-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce o singura paralela la acea dreapta.

**Not**  $a // b$



Unghiuri alterne interne:  $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$ ;  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$ ;

Unghiuri alterne externe:  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$ ;  $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$ ;

Unghiuri corespondente:  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$ ;  $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$ ;  $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$ ;  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$ ;

Unghiuri interne si de aceeasi parte a secantei:  $m(\sphericalangle 4) + m(\sphericalangle 5) = 180^\circ$ ;  $m(\sphericalangle 3) + m(\sphericalangle 6) = 180^\circ$ ;

Unghiuri externe si de aceeasi parte a secantei:  $m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 8) = 180^\circ$ ;  $m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 7) = 180^\circ$ .

### **Consecintele teoremei privind suma masurilor unghiurilor unui triunghi**

- 1) Unghiurile ascutite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.
- 2) Masurile unghiurilor ascutite ale unui triunghi dreptunghic sunt de  $45^\circ$ .
- 3) Masurile unghiurilor unui triunghi echilateral sunt de  $60^\circ$ .
- 4) Un triunghi isoscel cu un unghi de  $60^\circ$  este echilateral.
- 5) **Teorema unghiului de  $30^\circ$** : Intr-un triunghi dreptunghic cu un unghi de  $30^\circ$ , cateta care se opune acestuia este jumătate din ipotenuza.

### **Proprietatile triunghiului isoscel**

- 1) Intr-un triunghi isoscel unghiurile alaturate bazei sunt congruente.
- 2) Intr-un triunghi isoscel orice linie importanta corespunzatoare bazei coincide cu toate celelalte. (De exemplu: Inaltimea corespunzatoare bazei unui triunghi isoscel este si mediana si bisectoare si mediatoare.)
- 3) Intr-un triunghi isoscel inaltimile (sau medianele, sau bisectoarele) din varfurile bazei sunt congruente.
- 4) Un triunghi dreptunghic cu un unghi de  $45^\circ$  este isoscel; laturile congruente fiind catetele.
- 5) Toate centrele (centrul cercului circumscris triunghiului, centrul cercului inscris triunghiului, centrul de greutate, ortocentrul) sunt pe inaltimea corespunzatoare bazei.

### **Proprietatile triunghiului echilateral**

- 1) Intr-un triunghi echilateral toate unghiurile sunt congruente; avand masurile de  $60^\circ$ .
- 2) Intr-un triunghi echilateral orice linie importanta coincide cu toate celelalte. (De exemplu: O inaltime a triunghiului echilateral este si mediana si bisectoare si mediatoare.)
- 3) Intr-un triunghi echilateral toate inaltimile (sau medianele, sau bisectoarele) sunt congruente.

### **Proprietatile triunghiului dreptunghic**

- 1) Ortocentrul unui triunghi dreptunghic este varful unghiului drept, pentru ca doua dintre inaltimi sunt chiar catetele.
- 2) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei, raza acestui cerc fiind jumătate din ipotenuza.
- 3) Intr-un triunghi dreptunghic, mediana din varful unghiului drept este jumătate din ipotenuza, pentru ca este raza in cercul circumscris triunghiului.
- 4) **Teorema unghiului de  $30^\circ$** : Intr-un triunghi dreptunghic cu un unghi de  $30^\circ$ , cateta care se opune acestuia este jumătate din ipotenuza.

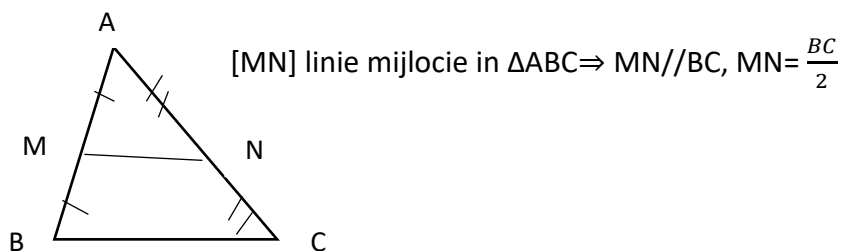
### **Inegalitatea triunghiului**

Intr-un triunghi, lungimea unei laturi este mai mica decat suma lungimilor celorlalte 2 laturi.

### Linia mijlocie in triunghi

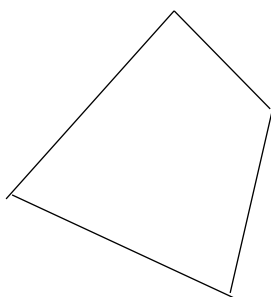
**Def** Se numeste linie mijlocie in triunghi, segmentul care uneste mijloacele a 2 laturi ale triunghiului.

**Teorema** Linia mijlocie a triunghiului este paralela cu cea de-a treia latura a triunghiului si este egala cu jumatate din ea.

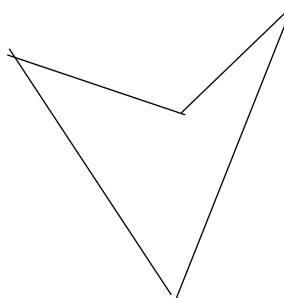


### Patrulater convex

**Def** Se numeste patrulater convex patrulaterul cu urmatoarea proprietate: oricum am alege 2 puncte din interiorul patrulaterului, segmentul care le uneste este inclus in interiorul patrulaterului.



Patrulater convex



Patrulater concav

**Teorema** Suma masurilor unghiurilor unui patrulater convex este de  $360^\circ$ .

### Paralelogramul

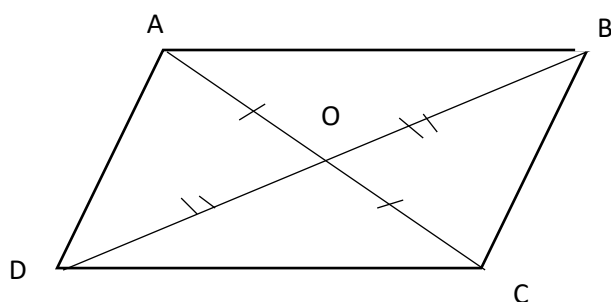
**Def** Se numeste paralelogram, patrulaterul convex cu laturile opuse paralele 2 cate 2.

**Proprietati** 1) Laturile opuse in paralelogram sunt congruente.

2) Unghiurile opuse in paralelogram sunt congruente.

3) Unghiurile alaturate in paralelogram sunt suplementare.

4) Diagonalele paralelogramului se injumatatesc.



**Obs** Pentru a arata ca un patrulater este paralelogram putem arata ca:

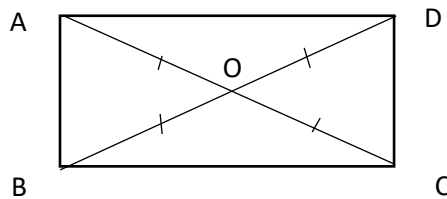
- 1) Laturile opuse sunt paralele 2 cate 2, sau
- 2) Laturile opuse sunt congruente 2 cate 2, sau
- 3) Unghiurile opuse sunt congruente 2 cate 2, sau
- 4) Unghiurile alaturate sunt suplementare, sau
- 5) Diagonalele se injumatatesc, sau
- 6) 2 laturi opuse sunt si paralele si congruente.

### Dreptunghiul

**Def** Se numeste dreptunghi paralelogramul cu un unghi drept.

**Proprietati** 1) Toate unghiurile dreptunghiului sunt drepte.

2) Diagonalele dreptunghiului sunt congruente.



**Obs1** Pentru a arata ca un patrulater este dreptunghi, aratam intai ca este paralelogram ( cu una din cele 6 metode) si apoi gasim un unghi drept sau aratam ca diagonalele sunt congruente.

**Obs2** Punctul de intersectie al diagonalelor dreptunghiului este centrul cercului circumscris dreptunghiului (cercul care trece prin toate varfurile dreptunghiului).

### Rombul

**Def** Se numeste romb, paralelogramul cu 2 laturi consecutive congruente.

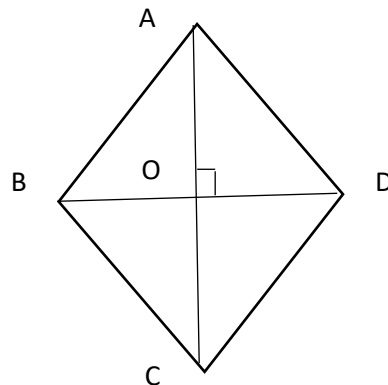
**Proprietati** 1) Toate laturile rombului sunt congruente.

2) Diagonalele rombului sunt perpendiculare.

3) Diagonalele rombului sunt bisectoarele unghiurilor.

**Obs1** Pentru a arata ca un patrulater este romb, aratam intai ca este paralelogram ( cu una din cele 6 metode) si apoi gasim 2 laturi consecutive congruente, sau aratam ca diagonalele sunt perpendiculare, sau aratam ca o diagonala este bisectoarea unui unghi al patrulaterului.

**Obs2** Punctul de intersectie al diagonalelor rombului este centrul cercului inscris in romb (cercul care atinge toate laturile rombului in cate un punct).

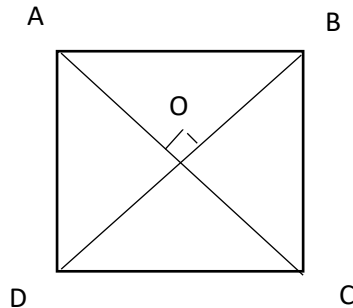


## Patratul

**Def** Patratul este romb cu un unghi drept, sau este dreptunghiul cu 2 laturi consecutive congruente.

**Obs1)** Patratul este si romb si dreptunghi in acelasi timp. El are toate proprietatile paralelogramului, dreptunghiului si rombului, dar nu mai are si alte proprietati.

**Obs2)** Punctul de intersectie al diagonalelor patraturii este si centrul cercului inscris si centrul cercului circumscris patraturii.



## Trapezul

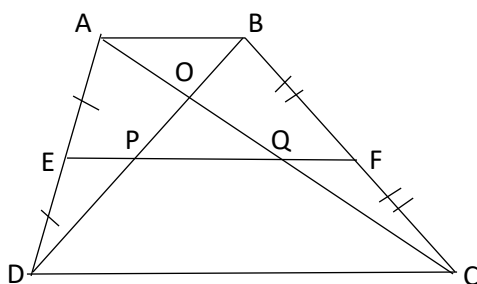
**Def** Se numeste trapez, patrulaterul convex cu 2 laturi paralele si 2 laturi neparalele. ( laturile paralele se numesc baze)

**Def** Se numeste inaltime in trapez, distanta dintre bazele trapezului.

**Def** Se numeste linie mijlocie in trapez, segmentul care uneste mijloacele laturilor neparalele ale trapezului.

**Teorema** Linia mijlocie a trapezului este paralela cu bazele si este egala cu semisuma lor. ( deci  $lm = \frac{B+b}{2}$  )

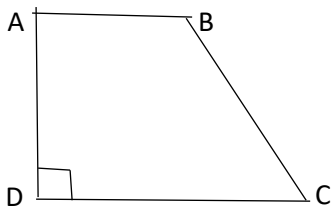
**Consecinta** Lungimea segmentului cuprins intre diagonale, pe linia mijlocie a trapezului este egala cu semidiferenta bazelor. (deci  $PQ = \frac{B-b}{2}$  )



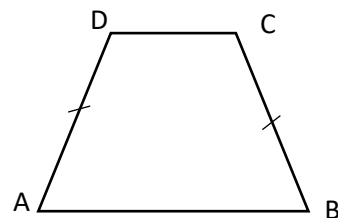
$$EF = (AB + CD) : 2$$

$$PQ = (CD - AB) : 2$$

**Def** Se numeste trapez dreptunghic, trapezul cu un unghi drept



**Def** Se numeste trapez isoscel, trapezul cu laturile neparalele congruente.



**Proprietatile trapezului isoscel: 1)** Unghiurile alaturate unei baze sunt congruente.

**2)** Diagonalele sunt congruente.

**Obs** Exista cercul circumscris trapezului isoscel; centrul acestuia se gaseste pe mediatoarea comuna a bazelor.

**Obs** Intr-un trapez isoscel ortodiagonal, (cu diagonalele perpendiculare) linia mijlocie este egala cu inaltimea. ( deci  $h=lm=\frac{B+b}{2}$  )

**Obs** Intr-un trapez dreptunghic ortodiagonal, inaltimea este media geometrica a bazelor. ( deci  $h=\sqrt{Bb}$  )

### Simetrie in patrulaterale studiate

**Def** Un punct este centru de simetrie pentru o figura geometrica, daca orice punct de pe figura isi are simetricul fata de centrul de simetrie, tot pe figura.

**Obs** Paralelogramul are centru de simetrie: punctul de intersectie al diagonalelor.

**Def** O dreapta este axa de simetrie pentru o figura geometrica, daca orice punct de pe figura isi are simetricul fata de axa de simetrie, tot pe figura.

**Obs** Dreptunghiul are 2 axe de simetrie: mediatoarele laturilor.

**Obs** Rombul are 2 axe de simetrie: diagonalele.

**Obs** Patratul are 4 axe de simetrie: mediatoarele laturilor si diagonalele.

### Arii

#### Aria triunghiului

1)  $A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$

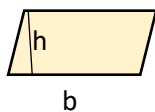
2)  $A_{\Delta \text{dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{ip \cdot h}{2}$

3)  $A_{\Delta \text{echilateral}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

4)  $A_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \angle(a,b)}{2}$

5) Formula lui Heron  $A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului si  $p = \frac{a+b+c}{2}$

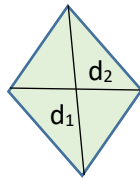
**Aria paralelogramului**  $A=b \cdot h$



**Aria dreptunghiului**  $A=L \cdot l$

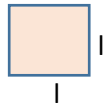


**Aria rombului**  $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

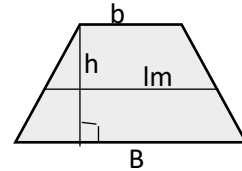


**Obs** Formula ariei rombului se poate folosi pentru orice patrulater ortodiagonal. (cu diagonalele perpendiculare)

**Aria patratului**  $A = l^2$

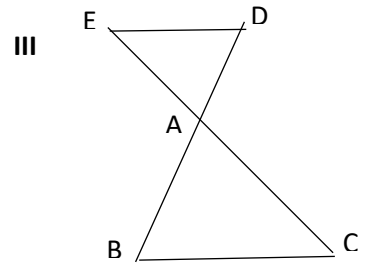
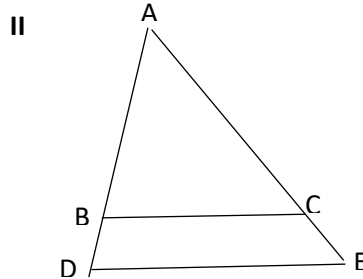
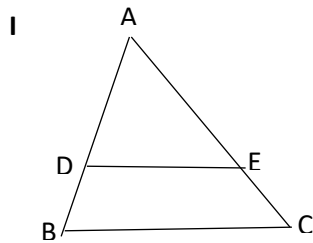


**Aria trapezului**  $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$  sau  $A = l_m \cdot h$ , pentru ca  $l_m = \frac{B+b}{2}$



### Teorema lui Thales

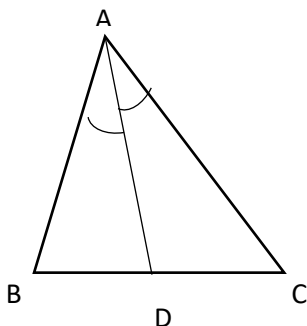
**TTh** O paralela dusă la una din laturile unui triunghi, determină pe celelalte 2 laturi ale triunghiului, segmente proportionale.



$$\triangle ABC, DE \parallel BC \xRightarrow{TTh} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

### Teorema bisectoarei

**TBisectoarei** Bisectoarea unui unghi al unui triunghi, împarte latura pe care ajunge în segmente proportionale cu laturile unghiului.



$$\triangle ABC, (AD \text{ bisectoarea } \angle BAC \xRightarrow{TB} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC})$$

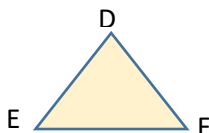
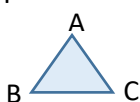
### Reciproca teoremei lui Thales

**RTTh** Dacă o dreaptă care taie 2 laturi ale unui triunghi, determină pe acestea segmente proportionale, atunci dreapta este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

Dacă în  $\triangle ABC$   $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xRightarrow{RTTh} DE \parallel BC$  (oricare din desenele I, II, sau III)

## Asemanarea triunghiurilor

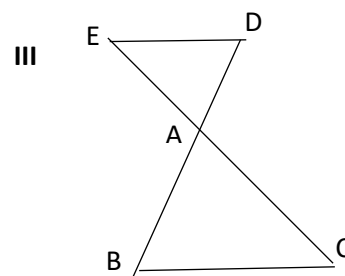
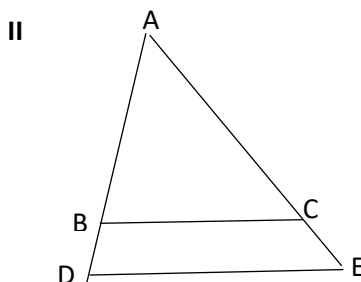
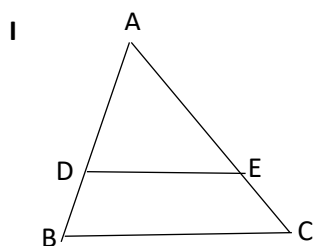
**Def** Doua triunghiuri sunt asemenea, daca au unghiurile respectiv congruente si laturile proportionale.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D; \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E; \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \text{ (raport de asemanare)} \end{cases}$$

## Teorema fundamentala a asemanarii

**TFA** O paralela dusa la una din laturile unui triunghi, formeaza cu celelalte doua laturi, un triunghi asemenea cu cel dat.



$$\triangle ABC, DE \parallel BC \xRightarrow{TFA} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

## Cazurile de asemanare

**Cazul U.U.** Daca 2 triunghiuri au 2 unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt asemenea.

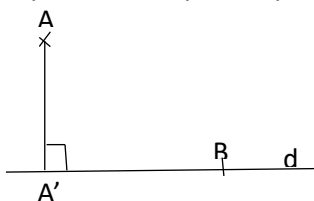
**Cazul L.U.L.** Daca 2 triunghiuri au 1 unghi congruent si laturile care-l formeaza proportionale, atunci ele sunt asemenea.

**Cazul L.L.L.** Daca 2 triunghiuri au toate laturile proportionale, atunci ele sunt asemenea.

**Obs** Daca 2 triunghiuri sunt asemenea, intr-un raport de asemanare  $k$ , atunci si inaltimile lor, si bisectoarele lor, si medianele lor omoloage sunt in raportul  $k$ , iar ariile lor sunt in raportul  $k^2$ .

## Relatii metrice in triunghiul dreptunghic

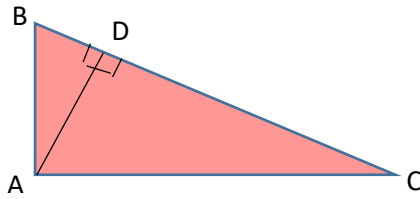
**Def** Se numeste proiectia unui punct pe o dreapta, piciorul perpendicularei duse din punct pe dreapta. Daca punctul este pe dreapta, el este propria sa proiectie.



$A' = \text{pr}_d A$  „ $A'$  este proiectia punctului  $A$  pe dreapta  $d$ ”

$B = \text{pr}_d B$ , pt ca  $B \in d$

**Teorema inaltimii** Intr-un triunghi dreptunghic, inaltimea din varful unghiului drept este medie geometrica intre proiectiile catetelor pe ipotenuza.



[AB], [AC] catetele  $c_1$ ,  $c_2$

[BC] ipotenuza ip      [AD] inaltimea h

[BD]=pr<sub>BC</sub>[AB]=pr<sub>c1</sub>      [CD]=pr<sub>BC</sub>[AC]=pr<sub>c2</sub>

**TH**  $h^2 = pr_{c1} \cdot pr_{c2}$

$AD^2 = BD \cdot CD$

**Teorema catetei** Intr-un triunghi dreptunghic, o cateta este medie geometrica intre ipotenuza si proiectia acelei catete pe ipotenuza.

**TC**  $c_1^2 = ip \cdot pr_{c1}$

$AB^2 = BC \cdot BD$

$c_2^2 = ip \cdot pr_{c2}$

$AC^2 = BC \cdot CD$

**Teorema lui Pitagora** Intr-un triunghi dreptunghic patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor.

**TP**  $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

**Formula inaltimii** Intr-un triunghi dreptunghic, inaltimea din varful unghiului drept este egala cu produsul catetelor supra ipotenuza.

**FH**  $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$

$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

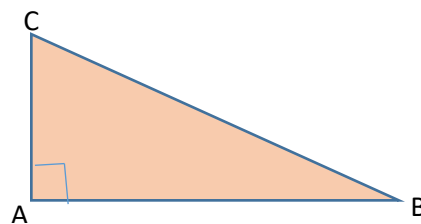
### Funcții trigonometrice

$\sin \angle B = \frac{\text{cateta opusa}}{\text{ipotenuza}} = \frac{AC}{BC}$

$\cos \angle B = \frac{\text{cateta alaturata}}{\text{ipotenuza}} = \frac{AB}{BC}$

$\text{tg} \angle B = \frac{\text{cateta opusa}}{\text{cateta alaturata}} = \frac{AC}{AB}$

$\text{ctg} \angle B = \frac{\text{cateta alaturata}}{\text{cateta opusa}} = \frac{AB}{AC}$



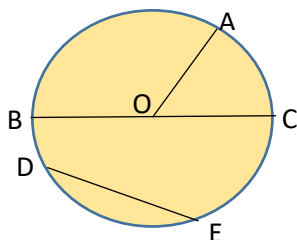
**Obs**  $\sin^2 \angle B + \cos^2 \angle B = 1$

| x    | 30°                  | 45°                  | 60°                  |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| sinx | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cosx | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| tgx  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| ctgx | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

### Cercul

**Def** Se numeste cerc multimea punctelor egal departate de un punct fix, numit centrul cercului. Distanța de la centrul cercului la orice punct de pe cerc este aceeași și se numeste raza.

**Not**  $C(O;R)$  „cercul de centru O și de raza R”



OA=R raza

DE=coarda (segment cu capetele pe cerc)

BC=diametru (coarda care trece prin centrul cercului)

BC=2R

**Def** Se numeste arc de cerc, o portiune de cerc cuprinsa între 2 puncte de pe cerc.

**Not**  $\widehat{AC}$  arcul mic cuprins între A și C

$\widehat{ADC}$  arcul mare cuprins între A și C

**Def** Arcul subintins unui diametru se numeste semicerc. ( $\widehat{BC}$  semicerc)

**Def** Se numeste masura unui arc, masura unghiului la centru (unghiul cu varful in centrul cercului), care subintinde (ține între laturile sale) acel arc.  $m(\widehat{AC})=m(\sphericalangle AOC)$

**Obs** Masura unui cerc este de 360°.

**Teorema** Intr-un cerc sau in cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente și reciproc.

**Teorema** Intr-un cerc sau in cercuri congruente, distantele de la centrul cercului la coarde congruente sunt egale și reciproc.

**Teorema** Intr-un cerc diametrul perpendicular pe o coarda imparte coarda și arcele corespunzatoare in parti congruente.

**Teorema** Intr-un cerc 2 drepte paralele determina între ele arce congruente.

**Pozitiile relative ale unei drepte fata de un cerc:**

-dreapta exterioara cercului (dreapta nu are nici un punct comun cu cercul)

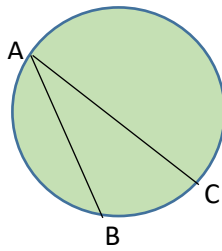
-dreapta secanta la cerc (dreapta intersecteaza cercul in 2 puncte)

-dreapta tangenta la cerc (dreapta are un singur punct comun cu cercul)

**Teorema** O dreapta tangenta la un cerc este perpendiculara pe raza dusa in punctul de tangenta.

**Def** Se numeste unghi inscris in cerc, unghiul cu varful pe cerc.

**Teorema** Masura unui unghi inscris in cerc este jumătate din masura arcului subtins.



$$m(\angle BAC) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$

### Lungimea si aria cercului

$$L_{\text{cerc}} = 2\pi R$$

$$\pi \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}, \quad \pi \approx 3,14$$

$$A_{\text{cerc}} = \pi R^2$$

### Raza cercului circumscris si raza cercului inscris in cerc

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A} \quad \text{unde } a, b, c \text{ sunt lungimile laturilor triunghiului, iar } A \text{ este aria triunghiului}$$

$$r = \frac{A}{p} \quad \text{unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ semiperimetrul triunghiului}$$

### Poligoane regulate

**Def** Se numeste poligon regulat, poligonul cu toate laturile si toate unghiurile respectiv congruente.

**Obs** Exista un cerc circumscris si un cerc inscris intr-un poligon regulat.

**Def** Se numeste apotema unui poligon regulat distanta de la centrul cercului circumscris la una din laturi. (deci raza cercului inscris in poligonul regulat)

### Triunghiul echilateral

- este poligonul regulat cu 3 laturi;
- masurile unghiurilor sunt de  $60^\circ$ ;

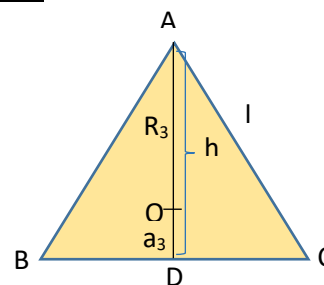
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \text{inaltimea triunghiului echilateral}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{l\sqrt{3}}{6} \quad \text{apotema triunghiului, sau raza cercului inscris in triunghiul echilateral}$$

$$R_3 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{l\sqrt{3}}{3} \quad \text{raza cercului circumscris triunghiului echilateral}$$

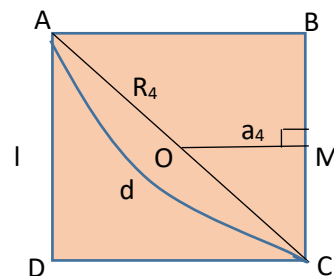
$$P = 3l \quad \text{perimetrul triunghiului echilateral}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{aria triunghiului echilateral}$$



### Patratul

- este poligonul regulat cu 4 laturi;
  - masurile unghiurilor sunt de  $90^\circ$ ;
- $d = l\sqrt{2}$  diagonala patratului
- $a_4 = \frac{l}{2}$  apotema patratului, sau raza cercului inscris in patrat
- $R_4 = \frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$  raza cercului circumscris patratului
- $P = 4l$  perimetrul patratului
- $A = l^2$  aria patratului



### Hexagonul regulat

- este poligonul regulat cu 6 laturi;
  - masurile unghiurilor sunt de  $120^\circ$ ;
  - se imparte, cu ajutorul diagonalelor mari, in 6 triunghiuri echilaterale congruente;
- $R_6 = l$  raza cercului circumscris hexagonului regulat
- $a_6 = h_{\Delta\text{echilateral}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  apotema sau raza cercului inscris in hexagonul regulat
- $d_M = 2l$  diagonala mare sau diametrul cercului circumscris (AD)
- $d_m = l\sqrt{3}$  diagonala mica (BD)
- $P = 6l$  perimetrul hexagonului regulat
- $A = 6A_{\Delta\text{echilateral}} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  aria hexagonului regulat

