

## Logaritmi

**Definiție.** Fie  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a \neq 1$  și  $b \in \mathbb{R}_+^*$  două numere reale. Se numește logaritm al numărului real strict pozitiv  $b$  exponentul la care trebuie ridicat numărul  $a$ , numit bază, pentru a obține numărul  $b$ .

Logaritmul numărului  $b$  în baza  $a$  se notează  $\log_a b$

Evident  $b = a^{\log_a b}$ . Pentru  $a = 10$  obținem logaritmi zecimali ( $\lg x$ ), iar pentru  $a = e$  obținem logaritmi naturali ( $\ln x$ ).

### Proprietăți:

1. Identitatea logaritmică fundamentală  $a^{\log_a b} = b$  unde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ .
2.  $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ , ( $b, c > 0$ );
3.  $\log_a a = 1$ ;
4.  $\log_a 1 = 0$
5.  $\log_a a^c = c$ ;  $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ;  $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$ ,  $x \neq 0$
6.  $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$ , ( $b > 0, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ );
7.  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ ;
8. Formula de schimbare a bazei logaritmului:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9.  $x > 0$  și  $y > 0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
10.  $x > 0$  și  $y > 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
11.  $a > 1$  și  $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x < 0$ ;  $a > 1$  și  $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$ ;
12.  $0 < a < 1$  și  $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x > 0$ ;  $0 < a < 1$  și  $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$ ;
13.  $a > 1$  și  $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ ;
14.  $x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1 \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$ ;
15.  $x > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot \log_a x = \log_a x^n$ ;
16.  $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$ .

### Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale

1.  $\log_a x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \in \mathbf{R}$ . Soluția:  $x = a^b$ .
2.  $\log_a x > b$ ,  $b \in \mathbf{R}$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

| $a$         | $S$              |
|-------------|------------------|
| $a > 1$     | $(a^b, +\infty)$ |
| $0 < a < 1$ | $(0, a^b)$       |

3.  $\log_a x < b$ ,  $b \in \mathbf{R}$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

| $a$         | $S$              |
|-------------|------------------|
| $a > 1$     | $(0, a^b)$       |
| $0 < a < 1$ | $(a^b, +\infty)$ |

4. Ecuația  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) este echivalentă cu  $f(x) = g(x)$ , cu condițiile  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$
5. Ecuația  $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$  este echivalentă cu

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ \text{Condiții:} \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D \text{ domeniul de rezolvabilitate}$$

### Probleme propuse

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \log_2 x$ . Să se calculeze  $f(1) + f(4) - f(2)$ .
2. Să se arate că  $\log_3 24 = 1 + 3a$ , unde  $a = \log_3 2$ .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg^2 x - 4\lg x + 3 = 0$ .
4. Se consideră numărul  $a = \log_2 3$ . Să se arate că  $\log_2 18 = 2a + 1$ .
5. Să se rezolve ecuația  $2^{\log_2 x} = 4$ .
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$ .
7. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ .
8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 (x^2 - x - 2) - \log_2 (2x - 4) = 1$ .
9. Să se arate că  $\log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 7$ .
10. Să se calculeze  $\log_2 \frac{1}{4} - \sqrt[3]{-8}$ .
11. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_5 (3x + 1) = 1 + \log_5 (x - 1)$ .
12. Să se calculeze  $\frac{\log_5 18 - \log_5 2}{\log_5 3}$ .
13. Să se verifice că  $\log_2 5 + \log_2 12 - \log_2 30 = 1$ .

14. Să se arate că numerele 1,  $\log_3 9$  și  $\sqrt[3]{64}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
15. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$ .
16. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ .
17. Să se calculeze  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$ .
18. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5 (x^2 + 2x - 3) = 1$ .
19. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 x^2 = 2$ .
20. Să se arate că numărul  $A = \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{9}{8}$  este natural.
21. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2 (x^2 - x - 2) = 2$ .
22. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 (x+2) - \log_2 (x+1) = 1$ .
23. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_7 (2x+1) = 2$ .
24. Să se calculeze  $\log_6 3 + \log_6 10 - \log_6 5$ .
25. Să se determine domeniul maxim de definiție  $D$  al funcției  $f: D \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \lg(2x-3)$ .
26. Să se arate că  $\log_2 4 + \log_3 9 < \sqrt{36}$ .
27. Să se calculeze  $\log_5 25 - \log_3 9$ .
28. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 (x^2 + 3x - 10) = 3$ .
29. Să se arate că numărul  $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$  este natural.
30. Să se compare numerele  $2^2$  și  $\log_2 32$ .
31. Să se calculeze  $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10$ .
32. Să se verifice că  $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \dots + \lg \frac{9}{10} = -1$ .
33. Să se calculeze  $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$ .
34. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5 (2x+3) = 2$ .
35. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3 (10-x) = 2$ .
36. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5 (2x+1) = 1$ .
37. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5 (9-x^2) = 1$ .
38. Să se calculeze  $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$ .
39. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3 (3x-1) = \log_3 (2x+1)$ .
40. Să se calculeze  $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6$ .
41. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 (x^2 + 4) = \log_2 (x + 4)$ .

## Probleme rezolvate

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_5 (3x + 4) = 2$ .

**R.** Condiții:  $3x+4>0 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right) = D$ , domeniul de rezolvabilitate.

Din definiția logaritmului obținem:

$$3x + 4 = 2^5 \Rightarrow 3x = 32 - 4 \Rightarrow 3x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{3} \in D, \text{ soluție.}$$

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2 (x + 2) + \log_2 x = 3$ .

**R.** Condiții:  $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, +\infty) = D$ . Aplicând proprietățile logaritmilor:

$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B)$  se obține:  $\log_2 x(x + 2) = 3$  și din definiția logaritmului avem:  
 $x(x + 2) = 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$  cu soluțiile  $x_1=2$  și  $x_2=-4$ . Soluția ecuației este  $x=2 \in D$ .

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 5) = 3$ .

**R.** Condiții:  $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow D = (5, +\infty)$ .

Aplicând proprietățile logaritmului ecuația va fi:

$$\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 2^3 \Rightarrow x+2 = 8(x-5) \Rightarrow x+2 = 8x-40 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6 \in D.$$

4. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului  $x$ , știind că  $\lg \sqrt{x}$ ,  $\frac{3}{2}$  și  $\lg x$  sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**R.** Verificăm proprietatea de medie aritmetică:

$$\frac{3}{2} = \frac{\lg \sqrt{x} + \lg x}{2} \Rightarrow \lg x \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 10^3 \Rightarrow ( )^2 \Rightarrow x^3 = (10^2)^3 \Rightarrow x = 10^2 = 100.$$

5. Să se calculeze  $\log_3 27 - \log_2 8$ .

**R.** Din definiția logaritmului avem  $\log_3 27 = 3$  și  $\log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_3 27 - \log_2 8 = 3 - 3 = 0$ .

6. Să se verifice că  $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4}$ .

**R.**  $\log_3 9 - \log_2 8 = 2 - 3 = -1$  și  $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$ .

7. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$ .

**R.** Condiții:  $\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$ ,

$$x^2 - 2x = 0, x_1 = 0, x_2 = 2,$$

|            |           |     |         |           |         |
|------------|-----------|-----|---------|-----------|---------|
| $x$        | $-\infty$ | $0$ | $2$     | $+\infty$ |         |
| $x^2 - 2x$ | $+++++$   | $0$ | $-----$ | $0$       | $+++++$ |

$$S_1 = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}, S_2 = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Domeniul de rezolvabilitate  $D = S_1 \cap S_2 = (2, +\infty)$ .

Rezolvare: din injectivitatea funcției logaritmice avem  $x^2 - 2x = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$  cu soluțiile  $x_1 = 1$  și  $x_2 = 3$ . Soluția ecuației este  $x = 4$  care aparține lui  $D$ .

8. Știind că  $\log_3 2 = a$ , să se verifice dacă  $\log_3 8 + \log_3 100 - \log_3 25 = 5a$ .

**R.**  $\log_3 8 + \log_3 100 - \log_3 25 = \log_3 2^3 + \log_3 10^2 - \log_3 5^2 = 3\log_3 2 + 2\log_3 (2 \cdot 5) - 2\log_3 5 =$   
 $= 3a + 2\log_3 2 + 2\log_3 5 - 2\log_3 5 = 3a + 2a = 5a.$

9. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_3(x^2 - 4x + 4) = 2$ .

**R.** Condiții  $x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x - 2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2$  și  $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ .

Rezolvare:  $x^2 - 4x + 4 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$  cu soluțiile  $x_1 = -1$  și  $x_2 = 5$  care sunt soluțiile ecuației.

10. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x + 5) = 3$ .

**R.** Condiția  $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5 \Rightarrow x \in (-5, +\infty)$ . Rezolvare:  $x + 5 = 2^3 \Rightarrow x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$ .

11. Să se calculeze  $2\log_3 4 - 4\log_3 2$ .

**R.**  $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = \log_3 4^2 - \log_3 2^4 = \log_3 16 - \log_3 16 = 0.$

12. Să se calculeze  $\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$ .

**R.**  $\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_2 1 = 0.$

13. Să se calculeze  $\log_6 24 - \log_6 4$ .

**R.**  $\log_6 24 - \log_6 4 = \log_6 \frac{24}{4} = \log_6 6 = 1.$

**14.** Să se calculeze  $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$ .

**R.**  $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{6 \cdot 2}{4} = \log_3 3 = 1.$

**15.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x-3)=0$ .

**R.** Condiția  $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$ . Rezolvare:  $x-3 = 2^0 \Rightarrow x = 4$ , soluție.

**16.** Să se calculeze  $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$ .

**R.**  $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6 = \lg \frac{20 \cdot 3}{6} = \lg 10 = 1.$

**17.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x^2 - 1) = 1$ .

**R.** Condiția  $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Rezolvare:  $x^2 - 1 = 3^1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$  și  $S = \{-2, 2\}$ .

## Logaritmi -exerciții rezolvate

1) Să se calculeze:

$$2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} + \log_{\sqrt{5}} 5 - \left(\frac{1}{2}\log_5 5\right)^2 - 2 = \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 - \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

2) Știind că  $\log_2 5 = a, \log_2 3 = b$  să se calculeze:

$$\log_8 75 = \log_8 (25 \cdot 3) = \log_8 25 + \log_8 3 = 2 \cdot \frac{1}{\log_5 8} + \frac{1}{\log_3 8} = \frac{2}{3\log_5 2} + \frac{1}{3\log_3 2} =$$

$$= \frac{2}{3}\log_2 5 + \frac{1}{3}\log_2 3 = \frac{2a+b}{3}$$

3) Știind că  $\log_2 5 = a, \log_2 3 = b$  să se calculeze:

$$\log_{15} 12 = \log_{15} 2^2 \cdot 3 = 2\log_{15} 2 + \log_{15} 3 = \frac{2}{\log_2 15} + \frac{1}{\log_3 15} =$$

$$= \frac{2}{\log_2 3 + \log_2 5} + \frac{1}{\log_3 3 + \log_3 5} = \frac{2}{b+a} + \frac{1}{1+\frac{\log_2 5}{\log_2 3}} = \frac{2+b}{a+b}$$

4) Să se calculeze :

$$\log_4 \left[ \log_3 \left( \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{512} \right) \right] = \log_4 \left[ \log_3 \left( \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^9 \right) \right] = \log_4 (\log_3 9) = \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

5) Să se calculeze :  $\log_{\frac{2}{3}} \left( \log_5 3^{\log_3 \sqrt[3]{25}} \right) = \log_{\frac{2}{3}} \left( \log_5 5^{\frac{2}{3}} \right) = \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1.$

6) Să se calculeze :

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[ \log_{\sqrt{6}} (\log_3 729) \right] = \log_{\frac{1}{2}} \left[ \log_{\sqrt{6}} (\log_3 3^6) \right] = \log_{\frac{1}{2}} \left[ \log_{\sqrt{6}} 6 \right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1.$$

7) Să se arate că următoarea expresie este independentă de x:

$$A = \frac{\log_5 x^2 + \log_5 x^3}{\log_4 x^2 + \log_4 x^3} = \frac{\log_5 x^5}{\log_4 x^5} = \frac{\log_5 x}{\log_4 x} = \frac{\frac{\lg x}{\lg 5}}{\frac{\lg x}{\lg 4}} = \frac{\lg 4}{\lg 5} = \log_5 4 = ct.$$

8) Demonstrați egalitatea:  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$

$$\frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 8} = \frac{\lg 2}{\lg 8} = \frac{\lg 2}{3\lg 2} = \frac{1}{3}.$$

9) Folosind regulile de calcul cu logaritmi, să se scrie într-o formă mai simplă:

$$\log_7 35 + \log_7 9 - \log_7 45 = \log_7 \frac{35 \cdot 9}{45} = \log_7 7 = 1.$$

10) Folosind regulile de calcul cu logaritmi, să se scrie într-o formă mai simplă:

$$E = \log_{13} \sqrt[3]{169} + \log_{13} \sqrt{4 + \sqrt{3}} + \log_{13} \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}} + \log_{13} \sqrt{3 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}}.$$

$$\begin{aligned} E &= \log_{13} \sqrt[3]{169} + \log_{13} (\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}}) = \\ &= \log_{13} \sqrt[3]{169} + \log_{13} (\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{3}}) = \log_{13} \sqrt[3]{169} + \log_{13} \sqrt{13} = \log_{13} (13^{\frac{2}{3}} \cdot 13^{\frac{1}{2}}) = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

11) Rezultatul calculului  $\log_2 (\lg 10^4) - \log_8 384 + \log_8 3 - \log_{\frac{1}{8}} \sqrt[4]{9^8 \sqrt{243}}$  este

a)  $\frac{41}{12}$ ;      b)  $\frac{7}{12}$ ;      c) 1;      d)  $-\frac{5}{3}$ .

$$\begin{aligned} E &= \log_2 4 - \log_8 2^7 \cdot 3 + \log_8 3 - \log_{\frac{1}{8}} 3^{\frac{11}{12}} = 2 + \log_8 2^{-7} - \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-11}{12}} = 2 + \frac{11}{12} - 7 \log_8 2 = \\ &= \frac{35}{12} - 7 \cdot \frac{1}{\log_2 8} = \frac{35}{12} - \frac{7}{3} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Deci, varianta corectă este b).

1. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{7}$  și  $BC = \sqrt{3}$ . Să se calculeze măsura unghiului  $B$ .

R. Din teorema cosinusului:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$  se obține:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \Rightarrow \cos B = \frac{16 + 3 - 7}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ.$$

2. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  știind că  $AC = 2$ ,  $m(\angle BAC) = 30^\circ$  și  $AB = 4$ .

R.  $A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2}$  și obținem  $A_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ .

3. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = AC = 2$ ,  $m(\angle A) = 30^\circ$ .

R.  $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ .

4. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 3$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$ .

R. Teorema sinusurilor  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris

triunghiului  $ABC$ . Obținem:  $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow R = 3$ .

5. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 1$ ,  $AC = 2$  și  $BC = \sqrt{5}$ . Să se calculeze  $\cos B$ .

R. Din teorema cosinusului se obține

$$\cos B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB \cdot AC} \Rightarrow \cos B = \frac{1 + 4 - 5}{1 \cdot 2} = 0 \Rightarrow m(\angle B) = 90^\circ.$$

6. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .

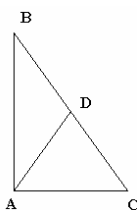
R.  $\sin^2 130^\circ = \sin^2(180^\circ - 50^\circ) = \sin^2 50^\circ$  și  $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$ .

7. Se consideră triunghiul  $ABC$ , având aria egală cu 15. Să se calculeze  $\sin A$ , știind că  $AB = 6$  și  $AC = 10$ .

R. Din  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin A}{2} = 15 \Rightarrow 60 \cdot \sin A = 30 \Rightarrow \sin A = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

8. Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  și  $D$  mijlocul ipotenuzei  $BC$ . Să se calculeze lungimea laturii  $AB$ , știind că  $AC = 6$  și  $AD = 5$ .

R.  $AD$  este mediană într-un triunghi dreptunghic și este jumătate



din ipotenuză  $\Rightarrow BC = 2AD \Rightarrow BC = 10$ .

Teorema lui Pitagora:  $BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB = 8$

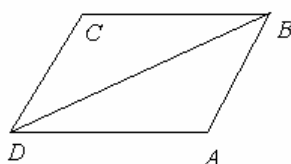
9. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 7$ . Să se calculeze  $\cos A$ .

R. Din teorema cosinusului:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cdot \cos A$  obținem

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \Rightarrow \cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{12 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

10. Să se calculeze aria unui paralelogram  $ABCD$ , știind că  $AB = 3$ ,  $AD = 3$  și  $m(\sphericalangle BAD) = 120^\circ$ .

R.



Aria paralelogramului este  $2 \cdot S_{\triangle ABD}$ .

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{și } S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

11. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  știind că  $BC = 8$  și  $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ .

R. Din teorema sinusurilor:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

12. Se consideră triunghiul  $ABC$  de arie egală cu 6, cu  $AB = 3$  și  $BC = 8$ . Să se calculeze  $\sin B$ .

$$R. \text{ Din } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Rightarrow 6 = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin B}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{12}{24} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2}.$$

13. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$  și  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.

R. Din formula fundamentală a trigonometriei avem:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}.$$

14. Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$  știind că  $AB = 2$ ,  $BC = 4$  și  $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ .

R. Din teorema cosinusului avem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$AC^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 20 - 8 = 12 \Rightarrow AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ și perimetrul este}$$

$$P = AB + BC + AC \Rightarrow P = 2 + 4 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}.$$

🧐 **15.** Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  și  $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ .

😊 **R.** Din teorema cosinusului în  $\triangle ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$

$$\Rightarrow BC^2 = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 41 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21} \text{ și}$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 5 + 4 + \sqrt{21} = 9 + \sqrt{21}.$$

🧐 **16.** Triunghiul  $ABC$  are  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5$ . Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful  $A$ .

😊 **R.** Din  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$  și triunghiul este dreptunghic.

Notăm  $AD$  înălțimea dusă din vârful  $A$ . Atunci:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow AB \cdot AC = BC \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow AD = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

🧐 **17.** Să se calculeze  $\sin 135^\circ$ .

😊 **R.**  $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

🧐 **18.** Raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este  $\frac{3}{2}$ , iar  $BC = 3$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

😊 **R.** Din teorema sinusurilor avem:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\sin A} = 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \sin A = 1.$

🧐 **19.** Să se calculeze  $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$ .

😊 **R.**  $\sin^2 135^\circ = \sin^2(180^\circ - 45^\circ) = \sin^2 45^\circ$  și

$$\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ = \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1 \text{ după formula trigonometrică fundamentală.}$$

🧐 **20.** Să se determine numărul real  $x$  pentru care  $x$ ,  $x+7$  și  $x+8$  sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

😊 **R.** Triunghiul dreptunghic verifică teorema lui Pitagora:  $(x+8)^2 = x^2 + (x+7)^2 \Rightarrow$

$$x^2 + 16x + 64 = x^2 + x^2 + 14x + 49 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \text{ cu soluțiile } x_1 = 5 \text{ și } x_2 = -3. \text{ Fiind}$$

lungimea unei laturi  $x = 5$ .

🧐 **21.** Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  și  $BC = 10$ .

😊 **R.** Din  $10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$  dreptunghic  $\Rightarrow$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

🧐 22. În triunghiul  $ABC$  măsura unghiului  $C$  este egală cu  $60^\circ$ ,  $AB = 4$  și  $BC = 2$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

😊 R. Din teorema sinusurilor avem:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

🧐 23. Să se calculeze  $\sin 120^\circ$ .

😊 R.  $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

🧐 24. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$  și măsura unghiului  $A$  este egală cu  $120^\circ$ .

😊 R.  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ .

🧐 25. Să se calculeze  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$ .

😊 R.  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin(180^\circ - 10^\circ) - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$ .

🧐 26. Să se calculeze  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$ .

😊 R.  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos(180^\circ - 120^\circ) + \cos(180^\circ - 150^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ - \cos 60^\circ - \cos 30^\circ = 0$ .

🧐 27. Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$  dacă  $MN=6$ ,  $NP=4$  și  $m(\angle MNP)=30^\circ$ .

😊 R.  $S_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 6$ .

🧐 28. Se calculeze  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ .

😊 R.  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ = \sin 60^\circ - \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ - \sin 60^\circ = 0$ .

🧐 29. Să se calculeze  $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$ .

😊 R. Din  $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ$  și  $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ \Rightarrow (\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ) = (-\cos 30^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 60^\circ) = 0$ .

🧐 30. Să se calculeze  $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$ .

😊 R.  $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ .

1. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{7}$  și  $BC = \sqrt{3}$ . Să se calculeze măsura unghiului  $B$ .

R. Din teorema cosinusului:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$  se obține:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \Rightarrow \cos B = \frac{16 + 3 - 7}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ.$$

2. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  știind că  $AC = 2$ ,  $m(\angle BAC) = 30^\circ$  și  $AB = 4$ .

R.  $A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2}$  și obținem  $A_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ .

3. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = AC = 2$ ,  $m(\angle A) = 30^\circ$ .

R.  $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ .

4. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 3$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$ .

R. Teorema sinusurilor  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Obținem:  $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow R = 3$ .

5. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 1$ ,  $AC = 2$  și  $BC = \sqrt{5}$ . Să se calculeze  $\cos B$ .

R. Din teorema cosinusului se obține

$$\cos B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB \cdot AC} \Rightarrow \cos B = \frac{1 + 4 - 5}{1 \cdot 4} = 0 \Rightarrow m(\angle B) = 90^\circ.$$

6. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .

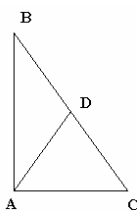
R.  $\sin^2 130^\circ = \sin^2(180^\circ - 50^\circ) = \sin^2 50^\circ$  și  $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$ .

7. Se consideră triunghiul  $ABC$ , având aria egală cu 15. Să se calculeze  $\sin A$ , știind că  $AB = 6$  și  $AC = 10$ .

R. Din  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin A}{2} = 15 \Rightarrow 60 \cdot \sin A = 30 \Rightarrow \sin A = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

8. Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  și  $D$  mijlocul ipotenuzei  $BC$ . Să se calculeze lungimea laturii  $AB$ , știind că  $AC = 6$  și  $AD = 5$ .

R.  $AD$  este mediană într-un triunghi dreptunghic și este jumătate



din ipotenuză  $\Rightarrow BC = 2AD \Rightarrow BC = 10$ .

Teorema lui Pitagora:  $BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB = 8$

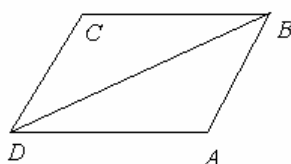
9. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 7$ . Să se calculeze  $\cos A$ .

R. Din teorema cosinusului:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$  obținem

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \Rightarrow \cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{12 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

10. Să se calculeze aria unui paralelogram  $ABCD$ , știind că  $AB = 3$ ,  $AD = 3$  și  $m(\angle BAD) = 120^\circ$ .

R.



Aria paralelogramului este  $2 \cdot S_{\triangle ABD}$ .

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{și } S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

11. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  știind că  $BC = 8$  și  $m(\angle A) = 45^\circ$ .

R. Din teorema sinusurilor:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

12. Se consideră triunghiul  $ABC$  de arie egală cu 6, cu  $AB = 3$  și  $BC = 8$ . Să se calculeze  $\sin B$ .

$$R. \text{ Din } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Rightarrow 6 = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin B}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{12}{24} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2}.$$

13. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$  și  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.

R. Din formula fundamentală a trigonometriei avem:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}.$$

14. Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$  știind că  $AB = 2$ ,  $BC = 4$  și  $m(\angle B) = 60^\circ$ .

R. Din teorema cosinusului avem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$AC^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 20 - 8 = 12 \Rightarrow AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ și perimetrul este}$$

$$P = AB + BC + AC \Rightarrow P = 2 + 4 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}.$$

🧐 **15.** Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  și  $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ .

😊 **R.** Din teorema cosinusului în  $\triangle ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$

$$\Rightarrow BC^2 = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 41 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21} \text{ și}$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 5 + 4 + \sqrt{21} = 9 + \sqrt{21}.$$

🧐 **16.** Triunghiul  $ABC$  are  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5$ . Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful  $A$ .

😊 **R.** Din  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$  și triunghiul este dreptunghic.

Notăm  $AD$  înălțimea dusă din vârful  $A$ . Atunci:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow AB \cdot AC = BC \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow AD = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

🧐 **17.** Să se calculeze  $\sin 135^\circ$ .

😊 **R.**  $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

🧐 **18.** Raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este  $\frac{3}{2}$ , iar  $BC = 3$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

😊 **R.** Din teorema sinusurilor avem:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\sin A} = 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \sin A = 1.$

🧐 **19.** Să se calculeze  $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$ .

😊 **R.**  $\sin^2 135^\circ = \sin^2(180^\circ - 45^\circ) = \sin^2 45^\circ$  și

$$\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ = \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1 \text{ după formula trigonometrică fundamentală.}$$

🧐 **20.** Să se determine numărul real  $x$  pentru care  $x$ ,  $x+7$  și  $x+8$  sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

😊 **R.** Triunghiul dreptunghic verifică teorema lui Pitagora:  $(x+8)^2 = x^2 + (x+7)^2 \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = x^2 + x^2 + 14x + 49 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$  cu soluțiile  $x_1 = 5$  și  $x_2 = -3$ . Fiind lungimea unei laturi  $x = 5$ .

🧐 **21.** Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  și  $BC = 10$ .

😊 **R.** Din  $10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$  dreptunghic  $\Rightarrow$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

- 🧐 22. În triunghiul  $ABC$  măsura unghiului  $C$  este egală cu  $60^\circ$ ,  $AB = 4$  și  $BC = 2$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

😊 R. Din teorema sinusurilor avem:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

- 🧐 23. Să se calculeze  $\sin 120^\circ$ .

😊 R.  $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- 🧐 24. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$  și măsura unghiului  $A$  este egală cu  $120^\circ$ .

😊 R.  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ .

- 🧐 25. Să se calculeze  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$ .

😊 R.  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin(180^\circ - 10^\circ) - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$ .

- 🧐 26. Să se calculeze  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$ .

😊 R.  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos(180^\circ - 120^\circ) + \cos(180^\circ - 150^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ - \cos 60^\circ - \cos 30^\circ = 0$ .

- 🧐 27. Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$  dacă  $MN=6$ ,  $NP=4$  și  $m(\angle MNP)=30^\circ$ .

😊 R.  $S_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 6$ .

- 🧐 28. Se calculeze  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ .

😊 R.  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ = \sin 60^\circ - \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ - \sin 60^\circ = 0$ .

- 🧐 29. Să se calculeze  $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$ .

😊 R. Din  $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ$  și  $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ \Rightarrow (\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ) = (-\cos 30^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 60^\circ) = 0$ .

- 🧐 30. Să se calculeze  $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$ .

😊 R.  $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ .

## Probleme propuse

1. Fie punctele  $A(2,-1)$  și  $B(-1,3)$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
2. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,-8)$  și  $B(6,3)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .
3. Să se determine numărul real  $a$  știind că vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$  sunt coliniari.
4. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră vectorii  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $5\vec{u} + 3\vec{v}$ .
5. Să se determine coordonatele punctului  $B$ , știind că  $A(3,4)$  și  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ .
6. Se consideră vectorii  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  și  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$ .
7. Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ , știind că  $A, B$  și  $C$  sunt vârfurile unui triunghi.
8. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se arate că  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
9. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2,-3)$  și  $\overrightarrow{OB}(1,-2)$ . Să se determine numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  pentru care vectorul  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$  are coordonatele  $(\alpha, \beta)$ .
10. Dacă  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ , să se determine valoarea raportului  $\frac{AB}{BC}$ .
11. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2,-1)$  și  $\overrightarrow{OB}(1,2)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
12. Fie  $ABC$  un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO}$ .
13. Să se determine numărul real  $m$  pentru care vectorii  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$  sunt coliniari.

**Rezolvare:**

1. Vectorul determinat de două puncte  $A(x_1, y_1)$  și  $B(x_2, y_2)$  este  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$  și se obține  $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\vec{i} + (3 - (-1))\vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Atunci  $a = -3$  și  $b = 4$ .

2.  $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$  și obținem  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4 + 6)\vec{i} + (-8 + 3)\vec{j} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$ .  
Coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  sunt  $(10, -5)$ .

3. Doi vectori  $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  și  $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$  sunt coliniari dacă  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ . Obținem:

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \Rightarrow 3a = 2a - 4 \Rightarrow a = -4.$$

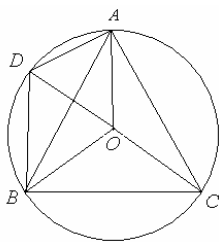
4.  $5\vec{u} + 3\vec{v} = 5(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3(5\vec{i} - \vec{j}) = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{i} - 3\vec{j} = 7\vec{j}$ .

5. Punctul  $B(x, y)$  și  $\overrightarrow{AB} = (x - 3)\vec{i} + (y - 4)\vec{j}$ . Atunci  $x - 3 = 1$  și  $y - 4 = 1$  se obține  $x = 4$  și  $y = 5$  iar  $B(4, 5)$ .

6.  $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{i} + 9\vec{j} = 17\vec{j}$ .

7.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  după regula triunghiului, iar  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$  și atunci  
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .

8.



$[OA] = [OB] = [OC]$  raza cercului circumscris

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ , regula paralelogramului

$AOBD$  este romb și  $\triangle AOD$  este echilateral, atunci

$[OA] = [OD]$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$ .

Avem  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

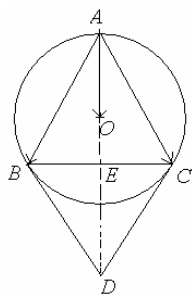
9.  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  și  $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j}$ , iar  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} = 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) - 5(\vec{i} - 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{i} + 10\vec{j} = \vec{i} + 5\vec{j}$  și atunci  $\alpha = 1$  și  $\beta = 5$ .

10. Din  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 2$

11. Din  $M$  mijlocul segmentului  $AB \Rightarrow$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \text{ și } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2}, M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ și } \overrightarrow{OM}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

12.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \text{ și } ABDC \text{ romb} \Rightarrow AD = 2AE \text{ și}$$

$$AO = \frac{2}{3} AE \Rightarrow AE = \frac{3}{2} AO, \text{ atunci } AD = 3AO \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0}.$$

13.  $\frac{2}{-1} = \frac{3}{m} \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

## Analiză combinatorică

### 1. Permutări

Definiția 1. O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată și se notază  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Definiția 2. Se numesc permutări ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele  $n$  elemente. Numărul permutărilor a  $n$  elemente,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este  $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ ;  $0! = 1$  (prin definiție).

Factorial (proprietăți):  $n! = (n-1)!n$ ;  $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

### 2. Aranjamente

Definiția 1. Se numesc aranjamente a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente, toate submulțimile ordonate cu câte  $m$  elemente care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ . Se notează  $A_n^m$ .

Numărul aranjamentelor a  $n$  elemente luate câte  $m$  este:

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, n \geq m.$$

Proprietăți:  $A_n^n = P_n$ ;  $A_n^n = \frac{n!}{0!}$  sau  $A_n^n = n!$ ;  $A_n^{n-1} = A_n^n$ ;  $A_n^0 = 1$ .

### 3. Combinări

Definiția 1. Se numesc combinări a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate submulțimile cu câte  $m$  elemente, care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ . Se notează  $C_n^m$ .

Proprietăți:

$$1. \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1; \quad 2. \quad C_n^n = C_n^{n-m}; \quad 3. \quad C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1};$$

$$4. \quad \text{Numărul submulțimilor unei mulțimi cu } n \text{ elemente este } 2^n;$$

$$5. \quad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-2} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1};$$

$$6. \quad \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_m!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \dots C_{n-(p_1+\dots+p_{m-1})}^{p_m} \text{ unde } p_1 + \dots + p_{m-1} < n$$

### 4. Binomul lui Newton

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n$$

$$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + (-1)^n C_n^n a^n \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

#### Proprietăți:

$$1. \quad \text{Termenul de rank } k+1 \text{ este } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k;$$

$$2. \quad C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; \quad C_{n+1}^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k;$$

$$3. \quad T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1} \text{ sau } T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1};$$

$$4. \quad \text{Numărul termenilor dezvoltării } (x \pm a)^n \text{ este } n+1;$$

$$5. \quad \text{Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.}$$

**Relații importante:**

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

**Dezvoltări particulare uzuale:**

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$2. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac);$$

$$3. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$4. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$5. (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc;$$

$$6. (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

**5. Suma puterilor asemenea ale primelor  $n$  numere naturale**

Dacă  $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; S_3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}; S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui  $S_p$ , când se cunosc  $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_1$  este formula lui Pascal:

$$(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n$$

**6. Probabilitate**

**Definiție.** Probabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor egal posibile care realizează evenimentul și numărul cazurilor egal posibile.

Așadar, vom spune că probabilitatea evenimentului  $A$  este egală cu raportul dintre numărul  $m$  al cazurilor favorabile realizării evenimentului  $A$  și numărul  $n$  al cazurilor egal posibile. Vom scrie

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

**Probleme propuse**

1. Să se calculeze  $C_3^2 + 3!$ .
2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea  $\{1,2\}$ .  
Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
3. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{30}\}$ , acesta să fie număr rațional.
4. După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
5. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{10}\}$ , acesta să fie rațional.
6. Să se calculeze  $A_4^4 + C_4^4$ .
7. O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 de lei. Să se calculeze rata dobânzii.
8. Să se compare numerele  $a = C_4^1 + C_4^3$  și  $b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$ .
9. Să se calculeze  $C_5^4 + A_5^4$ .
10. Să se rezolve ecuația  $C_n^2 = 28$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ .
11. Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
12. Să se efectueze  $A_6^2 - 2C_6^4$ .
13. Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
14. Să se calculeze  $C_8^3 - C_8^5$ .
15. Să se determine numărul natural  $n$ ,  $n \geq 1$  știind că  $A_n^1 + C_n^1 = 10$ .
16. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n! < 50$ .
17. Să se determine numărul natural  $n$ ,  $n \geq 5$ , știind că  $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$ .

- 18.** Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $\{1,2,3,4\}$ .
- 19.** Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii  $\{1,2,3,4\}$ .
- 20.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 21.** Să se rezolve ecuația  $C_{n+2}^{n+1} = 2$ , unde  $n \in \mathbf{N}$ .
- 22.** Să se calculeze  $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$ .
- 23.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele  $C_4^2, C_5^2$  și  $C_4^3$ , acesta să fie divizibil cu 3.
- 24.** Să se calculeze  $C_5^2 - A_4^2 + 6$ .
- 25.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n^2 \leq 2^n$ .

## Rezolvare

- După formula combinărilor  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  se obține:  $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$  și  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ . Atunci  $C_3^2 + 3! = 3 + 6 = 9$ .
- $p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ . Numerele obținute sunt 111, 112, 121, 122, 211, 221, 222, 212; numărul cazurilor posibile este 8. Numerele divizibile cu 3 sunt 111, 222; cazuri favorabile sunt 2.  $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .
- Pentru a fi număr rațional trebuie să fie cub perfect  $\Rightarrow \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3$ , sunt 3 cazuri favorabile și 30 de cazuri posibile  $\Rightarrow p = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ .
- Regula de trei simple:
 

|            |         |
|------------|---------|
| 80% .....  | 320 lei |
| 100% ..... | x lei   |

$$x = \frac{100 \cdot 320}{80} = 400, R: 400 \text{ lei.}$$
- Din mulțimea A numere raționale sunt  $\sqrt{4} = 2$  și  $\sqrt{9} = 3$  și probabilitatea este  $p = \frac{2}{9}$ .
- $A_4^4 + C_4^4 = \frac{4!}{(4-0)!} + \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1 + 1 = 2$ .
- |                |      |
|----------------|------|
| 1000 lei ..... | 100% |
| 80 lei .....   | x %  |

$$x = \frac{80 \cdot 100}{1000} = 8 \text{ . Răspuns 8% dobânda anuală.}$$
- $$a = C_4^1 + C_4^3 = \frac{4!}{1!(4-1)!} + \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 + 4 = 8 \text{ și}$$

$$b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8, \text{ atunci } a = b.$$
- $C_5^4 + A_5^4 = \frac{5!}{1! \cdot (5-4)!} + \frac{5!}{(5-4)!} = 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 + 120 = 125$ .
- $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1) \cdot n}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 28 \Rightarrow (n-1) \cdot n = 56$   
 produsul a două numere naturale consecutive este 56  $\Rightarrow 7 \cdot 8 = 56 \Rightarrow n = 8$ .
- Numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente dintr-o mulțime cu 5 elemente este  $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$ .

$$12. A_6^2 - 2C_6^4 = \frac{6!}{(6-2)!} - 2 \cdot \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!} - \cancel{2} \cdot \frac{6!}{4!\cancel{2!}} = \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{4!} = 0$$

13. Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii cu 4 elemente este

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2}} = 6.$$

$$14. \text{Din } C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_8^3 = C_8^5 \Rightarrow C_8^3 - C_8^5 = 0.$$

$$15. A_n^1 + C_n^1 = 10 \Rightarrow \frac{\cancel{n!}^n}{(\cancel{n-1})!} + \frac{\cancel{n!}^n}{1! \cdot (\cancel{n-1})!} = 10 \Rightarrow n + n = 10 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5.$$

16. Calculăm pentru fiecare:  $0! = 1 < 50$ ;  $1! = 1 < 50$ ;  $2! = 2 < 50$ ;  $3! = 6 < 50$ ;  $4! = 24 < 50$  și  $5! = 120 > 50$ .

$$\text{Probabilitatea } p = \frac{5}{6}.$$

$$17. \frac{(n-3)!}{(n-5)!} = \frac{(\cancel{n-5})!(n-4)(n-3)}{(\cancel{n-5})!} = (n-4)(n-3) \text{ și se obține } (n-4)(n-3) = 6. \text{ Produsul}$$

a două numere naturale consecutive este  $6 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow n - 4 = 2 \Rightarrow n = 6$ .

$$18. \text{Se pot forma } A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1!} = 24 \text{ numere naturale de câte trei cifre distincte.}$$

19. Numere de două cifre distincte dintr-o mulțime cu patru elemente este

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12 \text{ și se mai pot forma 4 numere cu cifrele identice, atunci sunt}$$

16 numere de două cifre.

20. Pătrețele perfecte de două cifre sunt: 16, 25, 36, 49, 64, 81 și sunt 90 de numere de două

$$\text{cifre. Atunci } p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

$$21. C_{n+2}^{n+1} = 2 \Rightarrow \frac{(\cancel{n+2})!^{n+2}}{1 \cdot (\cancel{n+1})! \underbrace{(\cancel{n+2-n-1})!}_{=1}} = 2 \Rightarrow n+2 = 2 \Rightarrow n = 0.$$

$$22. C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$$

$$23. C_4^2 = 6:3, C_5^2 = 10 \text{ și } C_4^3 = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

$$24. C_5^2 - A_4^2 + 6 = \frac{5!}{2!(5-2)!} - \frac{4!}{(4-2)!} + 6 = \frac{\cancel{5!}^{4 \cdot 5}}{2! \cdot \cancel{3!}_1} - \frac{\cancel{4!}^{3 \cdot 4}}{\cancel{2!}_1} + 6 = 10 - 12 + 6 = 4.$$

25. Verificăm pentru fiecare element al mulțimii:

$$n=1 \Rightarrow 1^2 \leq 2^1 \text{ „A”}; n=2 \Rightarrow 2^2 \leq 2^2 \text{ „A”}; n=3 \Rightarrow 3^2 \leq 2^3 \Rightarrow 9 \leq 8 \text{ „F”};$$

$$n=4 \Rightarrow 4^2 \leq 2^4 \Rightarrow 16 \leq 16 \text{ „A”}; n=5 \Rightarrow 5^2 \leq 2^5 \Rightarrow 25 \leq 32 \text{ „A”}. \text{ Probabilitatea}$$

$$p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}. \text{ Inegalitatea este verificată pentru } 1, 2, 4, 5 \Rightarrow p = \frac{4}{5}.$$

## Analiză combinatorie

### 1. Permutări

Definiția 1. O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată și se notază  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Definiția 2. Se numesc permutări ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele  $n$  elemente. Numărul permutărilor a  $n$  elemente,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este  $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ ;  $0! = 1$  (prin definiție).

Factorial (proprietăți):  $n! = (n-1)!n$ ;  $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

### 2. Aranjamente

Definiția 1. Se numesc aranjamente a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente, toate submulțimile ordonate cu câte  $m$  elemente care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ . Se notează  $A_n^m$ .

Numărul aranjamentelor a  $n$  elemente luate câte  $m$  este:

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, n \geq m.$$

Proprietăți:  $A_n^n = P_n$ ;  $A_n^n = \frac{n!}{0!}$  sau  $A_n^n = n!$ ;  $A_n^{n-1} = A_n^n$ ;  $A_n^0 = 1$ .

### 3. Combinări

Definiția 1. Se numesc combinări a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate submulțimile cu câte  $m$  elemente, care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ . Se notează  $C_n^m$ .

Proprietăți:

$$1. C_n^1 = n; C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1; 2. C_n^n = C_n^{n-m}; 3. C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1};$$

$$4. \text{Numărul submulțimilor unei mulțimi cu } n \text{ elemente este } 2^n;$$

$$5. C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^m + C_{m-1}^{m-1};$$

$$6. \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \dots C_{n-(p_1+\dots+p_{m-1})}^{p_m} \text{ unde } p_1 + \dots + p_{m-1} < n$$

### 4. Binomul lui Newton

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n$$

$$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + (-1)^n C_n^n a^n \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

#### Proprietăți:

$$1. \text{Termenul de rank } k+1 \text{ este } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k;$$

$$2. C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; C_{n+1}^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k;$$

$$3. T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1} \text{ sau } T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1};$$

$$4. \text{Numărul termenilor dezvoltării } (x \pm a)^n \text{ este } n+1;$$

$$5. \text{Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.}$$



### Relații importante:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$



### Dezvoltări particulare uzuale:

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$2. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac);$$

$$3. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$4. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$5. (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc;$$

$$6. (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$



### 5. Suma puterilor asemenea ale primelor $n$ numere naturale

Dacă  $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; S_3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}; S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui  $S_p$ , când se cunosc  $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_1$  este formula lui Pascal:  $(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n$

## Progresii



### 1. Progresii aritmetice

**Definiția 1.** Se numește progresie aritmetică un șir de numere  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  în care fiecare termen, începând cu  $a_2$ , se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit rația progresiei. Se notează  $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Dacă  $a_1$  este primul termen,  $a_n$  cel de-al  $n$ -lea termen (termenul general),  $r$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, atunci avem:

$$a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$$

**Termenii echidistanți de extremi.** Într-o progresie aritmetică suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi:  $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ .

**Observație.** Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ), atunci există un termen în mijloc,  $a_{m+1}$ , astfel încât  $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$ .

Condiția necesară și suficientă pentru ca trei termeni  $a, b, c$ , luate în această ordine, să formeze o progresie aritmetică, este să avem  $2b = a + c$ .

## 2. Progresii geometrice

Definiția 1. Se numește progresie geometrică un șir de numere  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  în care fiecare termen, începând cu  $a_2$ , se obține din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un același număr  $q$  ( $q \neq 0$ ) numit rație. Se notează  $\ddot{a}_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Dacă  $a_1$  este primul termen,  $a_n$  cel de-al  $n$ -lea termen (termenul general),  $q$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, atunci avem:

$$a_n = qa_{n-1}, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \geq 2 \text{ (} a_n \text{ în funcție de } a_1, q \text{ și } n \text{)}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, q \neq 1$$

**Termeni echidistanți de extremi.** Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi:  $a_p a_{n-p+1} = a_1 a_n$ .

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ) atunci există un termen la mijloc,  $a_{m+1}$ , astfel încât  $a_{m+1}^2 = a_1 a_{2m+1}$ .

Condiția necesară și suficientă ca trei numere  $a, b, c$ , luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem  $b^2 = ac$ .

### Probleme rezolvate

 1. Se consideră dezvoltarea  $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R}.$

a) Determinați  $n$  astfel încât  $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$  să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru  $n=8$ , verificați dacă există valori ale lui  $x$  astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

 R. 1) a)  $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$  sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice, atunci

$$\frac{1}{2}C_n^1 = \frac{1}{2}\left(C_n^0 + \frac{C_n^2}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} \frac{n(n+1)}{2}\right) \Leftrightarrow 8n = 8 + n^2 - n$$

$$n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow n = 8 \quad (n=1 \text{ nu satisface}).$$

b) Pentru  $n=8 \Rightarrow T_6 - T_4 = 56$

$$C_8^5 \left(\frac{\frac{x}{2^2}}{\frac{3}{2^{16}}}\right)^{8-5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{2^{16}}}{\frac{x}{2^2}}\right)^5 - C_8^3 \left(\frac{\frac{x}{2^2}}{\frac{3}{2^{16}}}\right)^{8-3} \cdot \left(\frac{\frac{5}{2^{16}}}{\frac{x}{2^2}}\right)^3 = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 2^{\frac{3x}{2} - \frac{9}{16} + \frac{25}{16} - \frac{5x}{2}} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 2^{\frac{5x}{2} - \frac{15}{16} + \frac{15}{16} - \frac{3x}{2}} = 56 \Leftrightarrow 2^{1-x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1, \text{ sau } 2^x = -2$$

Soluția  $x=0$  pentru că  $2^x > 0, \forall x \in \mathbf{R}.$

 2. Se consideră dezvoltarea  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n, x \in \mathbf{R}^*, n \in \mathbf{N}^*.$

a) Să se determine  $n$  astfel încât suma coeficienților primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru  $n=8$ , verificați dacă există un termen care conține pe  $x^4$ . Justificați răspunsul.

 R. a)  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$$C_n^0 + C_n^1 \cdot 1 \cdot (-2) + C_n^2 \cdot 1 \cdot (-2)^2 = 97$$

$$\text{Rezolvarea ecuației } 1 - 2n + 4 \frac{n(n-1)}{2} = 97 \Rightarrow n = 8 \in \mathbf{N}$$

$$\text{b) Pentru } n=8 \Rightarrow T_{k+1} = C_8^k (x^2)^{8-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_8^k \cdot x^{2(8-k)} \cdot (-2)^k \cdot x^{-k}$$

$$2(8-k) - k = 4 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow T_5 \text{ conține pe } x^4.$$

 3. Se consideră  $a, b, c$  și  $x$  numere reale strict pozitive și diferite de 1.

Să se demonstreze că următoarea echivalență este adevărată:  $a, b, c$  sunt termenii succesivi ai unei

progresii aritmetice dacă și numai dacă  $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}, \text{ și } \frac{1}{\log_c x}$  sunt termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

 **R.** Utilizând relația  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  obținem:  $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$ ,  $\frac{1}{\log_b x} = \log_x b$ ,  $\frac{1}{\log_c x} = \log_x c$ .

i) Presupunem  $a, b, c$  progresie geometrică, atunci  $b^2 = a \cdot c$  și prin logaritmare în baza  $x$  avem:

$$\log_x b^2 = \log_x (a \cdot c) \Leftrightarrow \log_x b = \frac{\log_x a + \log_x c}{2}, \text{ deci este adevărată ii).}$$

ii) Presupunem  $\log_x b = \frac{\log_x a + \log_x c}{2} \Rightarrow 2 \log_x b = \log_x (a \cdot c) \Rightarrow b^2 = a \cdot c$ .

 **4.** Se consideră dezvoltarea  $(x + x^{\lg x})^5$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$ .

Să se determine  $x$ , știind că al treilea termen al dezvoltării este  $10^6$

 **R.**  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$$T_3 = T_{2+1} = C_5^2 x^3 (x^{\lg x})^2 = 10x^{3+2\lg x}$$

$$x^{3+2\lg x} = 10^5 \Rightarrow \lg x^{3+2\lg x} = \lg 10^5 \Rightarrow (3 + 2\lg x) \cdot \lg x = 5$$

$$2\lg^2 x + 3\lg x - 5 = 0 \Rightarrow \lg x = -\frac{5}{2}, \lg x = 1$$

$$x_1 = 10^{-\frac{5}{2}}, x_2 = 10.$$

 **4.** Se consideră dezvoltarea:  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbf{R}^*$ ,  $n \geq 2$ .

a) Să se determine  $n$  astfel încât  $C_n^2 = C_n^1 + 44$ .

b) Pentru  $n=11$ , verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe  $x$ . Justificați răspunsul.

 **R. ) a)**  $C_n^2 = C_n^1 + 44 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = n + 44 \Rightarrow n = 11 \in \mathbf{N}$ .

b) Pentru  $n=11$  din  $T_{k+1} = C_n^k \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k} (x^{-4})^k$  se obține  $\frac{33-3k}{2} - 4k = 0$

cu  $k=3$ , deci  $T_4 = C_{11}^3$  nu conține pe  $x$ .

 **6.** Se consideră dezvoltarea  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

a) Să se determine  $n \in \mathbf{N}^*$ , știind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este 46.

b) Pentru  $n=9$ , verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe  $x$ .

 **R. a)**  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ , deci coeficienții ceruți sunt  $C_n^0, C_n^1$  și  $C_n^2$

$$\text{Obținem ecuația } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46 \Rightarrow 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} = 46 \Rightarrow n = 9 \in \mathbf{N}.$$

b) Pentru  $n=9$ ,  $T_{k+1} = C_9^k (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_9^k \cdot x^{18-2k-k}$ , care nu conține pe  $x \Leftrightarrow 18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k=6$ .

 **7.** Se consideră dezvoltarea  $\left(x^4\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

a) Să se determine  $n$  astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 36.

b) Pentru  $n=9$ , verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe  $x^3$ . Justificați răspunsul.

 **R. ) a)**  $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow n_1 = 9$  și  $n_2 = -8$  nu este soluție

pentru că nu este număr natural.

$$\text{b)} T_{k+1} = C_n^k \left( x^4 \sqrt{x} \right)^{9-k} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^k = C_n^k x^{\frac{5(9-k)}{4} - \frac{k}{2}}. \text{ Avem: } \frac{5(9-k)}{4} - \frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$45-5k-2k=12 \Rightarrow 7k=33 \Rightarrow k = \frac{33}{7} \notin \mathbf{N}, \text{ deci nu există termeni care să conțină pe } x^3.$$

 **8.** Se consideră dezvoltarea  $\left( 9x - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{x}} \right)^n$ ,  $x \in \mathbf{R}, x > 0$  și  $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ .

a) Să se determine  $n \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 105.

b) Pentru  $n=15$ , verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe  $x^5$ . Justificați răspunsul.

 **R. a)** Punem condiția:  $C_n^2 = 105 \Rightarrow n=15$

b) Folosind formula termenului general, obținem:  $T_{k+1} = C_{15}^k (9x)^{15-k} \left( \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{x}} \right)^k$  și presupunând că există

termenul care-l conține pe  $x^5$  vom avea de determinat pe  $k$  din relația  $15-k-\frac{k}{2}=5$ , cu soluția  $k = \frac{20}{3}$  care nu convine deoarece nu este număr natural. Deci nici un termen al dezvoltării nu-l conține pe  $x^5$ .

 **9.** Se consideră dezvoltarea  $\left( \sqrt{y} + \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} \right)^n$ ,  $y \in \mathbf{R}, y > 0$  și  $n \in \mathbf{N}^*$ .

a) Să se determine  $n$  pentru care coeficienții termenilor 1, 2, respectiv 3 ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.

b) Pentru  $n=8$ , verificați dacă există termeni ai dezvoltării astfel încât puterea lui  $y$  să fie număr natural.

 **R. a)**  $\left( \sqrt{y} + \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} \right)^n = C_n^0 (\sqrt{y})^n + C_n^1 \cdot (\sqrt{y})^{n-1} \cdot \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} + C_n^2 \cdot (\sqrt{y})^n \cdot \left( \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} \right)^2 + \dots$  și

$$\text{atunci } \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4} C_n^2 \Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{n!}{2 \cdot (n-2)!} \Rightarrow n = 1 + \frac{n(n-1)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \text{ cu soluțiile } n_1 = 1, n_2 = 8 \Rightarrow n=8.$$

b) Pentru  $n=8$  dezvoltarea va fi:  $\left( \sqrt{y} + \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} \right)^8$  și termenul general:

$$T_{k+1} = C_8^k (\sqrt{y})^{8-k} \cdot \left( \frac{1}{2^4 \sqrt{y}} \right)^k = \frac{1}{2^k} \cdot C_8^k \cdot y^{\frac{8-k}{2}} \cdot y^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2^k} \cdot C_8^k \cdot y^{\frac{16-2k-k}{4}} = \frac{1}{2^k} \cdot C_8^k \cdot y^{\frac{16-3k}{4}}. \text{ Avem:}$$

$$\frac{16-3k}{4} \in \mathbf{N} \text{ pentru } n=4 \text{ vom avea } y^1 \text{ în termenul } T_5.$$

 **10.** Se consideră dezvoltarea  $\left( \frac{1}{\sqrt[8]{x}} + x^{\lg x} \right)^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R}, x > 0$ .

a) Să se determine  $n$  dacă diferența dintre coeficientul binomial al celui de al treilea termen și coeficientul binomial al celui de al doilea termen al dezvoltării este 27.

b) Pentru  $n=9$ , verificați dacă există valori ale lui  $x$ , astfel încât al doilea termen al dezvoltării să fie 900.

🤖 **R. a)**  $C_n^2 - C_n^1 = 27 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} = 27 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27 \Rightarrow n^2 - 3n - 54 = 0$  cu

soluțiile  $n_1 = -6$  și  $n_2 = 9$ , atunci  $n = 9$ .

**b)** Pentru  $n=9$  dezvoltarea va fi:  $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}} + x^{\lg x}\right)^9 = C_9^0 \left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^9 + C_9^1 \left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^8 \cdot (x^{\lg x}) + \dots$  și termenul al

doilea este  $C_9^1 \left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^8 \cdot (x^{\lg x}) = 9 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\lg x} = 9x^{\lg x - 1} \Rightarrow 9x^{\lg x - 1} = 900 \Rightarrow x^{\lg x - 1} = 100$  și logaritmăm

ecuația  $\Rightarrow \lg(x^{\lg x - 1}) = \lg 100 \Rightarrow (\lg x - 1) \lg x = 2 \Rightarrow \lg^2 x - \lg x - 2 = 0$ . Notăm  $\lg x = y$  și obținem  $y^2 - y - 2 = 0$ , cu  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$ . Revenim la notație, avem  $\lg x = 1 \Rightarrow x_1 = 10$  și  $\lg x = 2 \Rightarrow x_2 = 100$ .

🤖 **11.** În dezvoltarea binomului  $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui  $x$  pentru care suma dintre termenii al treilea și al cincilea este egală cu 135.

🤖 **R.**  $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n = C_n^0 \left(\sqrt{2^x}\right)^n + C_n^1 \left(\sqrt{2^x}\right)^{n-1} \cdot \sqrt{2^{1-x}} + \dots + C_n^{n-2} \left(\sqrt{2^x}\right)^2 \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^{n-2} +$   
 $+ C_n^{n-1} \sqrt{2^x} \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$  și obținem

$$C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{n!} = 22 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Rightarrow$$

$$n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow n_1 = 6, n_2 = -7 \text{ și atunci } n=6, \text{ iar dezvoltarea va fi } \left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^6.$$

$$T_3 + T_5 = C_6^2 \left(\sqrt{2^x}\right)^4 \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2 + C_6^4 \left(\sqrt{2^x}\right)^2 \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{1-x} + \frac{6!}{4! \cdot 2!} 2^x \cdot 2^{2(1-x)} \Rightarrow$$

$$15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135 \mid : 15 \Rightarrow 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 9 \mid \cdot 2^x \Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 + 4 = 9 \cdot 2^x, \text{ notăm } 2^x = y \text{ și obținem:}$$

$$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 4.$$

Revenim la necunoscuta  $x$ :  $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -1$  și  $2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 2$ .

## Numere complexe

Definiția 1. Se numește **număr complex** orice element  $z=(a,b)$  al mulțimii  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$ , înzestrată cu două operații algebrice, **adunarea**:  $\forall z=(a,b)$  și  $z'=(a',b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ,  $z + z' = (a + a', b + b')$  și **înmulțirea**:  $\forall z=(a,b)$ ,  $\forall z'=(a',b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ,  $z \cdot z' = (aa' - bb', ab' + a'b)$ . **Mulțimea numerelor complexe** se notează cu  $\mathbf{C}$  și este corp comutativ,  $\mathbf{C} = \{z=a+bi \mid a,b \in \mathbf{R}, i^2=-1\}$ .

### 1. Forma algebrică a numerelor complexe

$z = a + ib$ , cu  $a = (a,0)$ ,  $b = (b,0)$  și  $i = (0,-1)$ , respectiv  $i^2 = -1$ .

**Egalitatea a două numere complexe  $z$  și  $z'$ :**

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'$$

**Adunarea numerelor complexe**

$$z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i \Rightarrow z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i.$$

**are proprietățile:**

- asociativă,
- comutativă,
- admite ca element neutru pe  $0=0+0i$ ,
- orice număr complex  $z = a + bi$  admite un opus  $-z = -a - ib$ .

**Înmulțirea numerelor complexe**

$$z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i \Rightarrow z_1 \cdot z_2=a_1 \cdot a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

**are proprietățile:**

- asociativă,
- comutativă,
- admite ca element neutru pe  $1=1+0 \cdot i$ ,
- orice număr complex  $z = a + bi$  nenul admite un invers

$$\left( z^{-1} = (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right),$$

- este distributivă față de adunare  $z(z' + z'') = zz' + zz'' \quad \forall z, z', z'' \in \mathbf{C}$ .

**Puterile numărului  $i$ :**  $\forall m \in \mathbf{N}$ ,  $i^{4m} = 1$ ,  $i^{4m+1} = i$ ,  $i^{4m+2} = -1$ ,  $i^{4m+3} = -i$ .

Definiția.2. Dacă  $z = a + bi$ , atunci numărul  $a - ib$  se numește **conjugatul lui  $z$**  și se notează  $a - ib = \overline{a + ib} = \bar{z}$ .

Au loc următoarele proprietăți,  $\forall z, z' \in \mathbf{C}$ .

1.  $z + \bar{z} = 2a;$
2.  $z - \bar{z} = 2bi;$
3.  $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}';$
4.  $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}';$
5.  $\overline{zz'} = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi);$
6.  $\frac{z}{z'} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}};$
7.  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n;$
8.  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}.$

## 2. Modulul unui număr complex

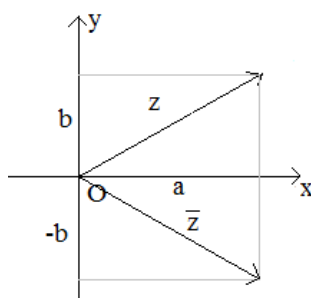
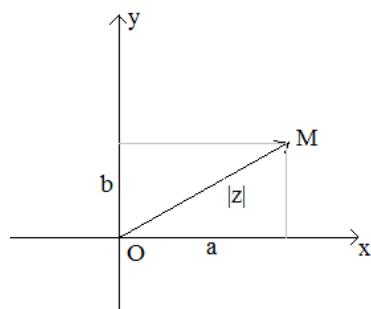
$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{z\bar{z}} \text{ sau } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Avem apoi:

1.  $|z| = |\bar{z}|$
2.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|;$
3.  $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|;$
4.  $|zz'| = |z||z'|;$
5.  $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, |z| \neq 0.$

## 3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

$$z \in \mathbb{C}, z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$$



## 4. Forma trigonometrică a numerelor complexe

$z = r(\cos u + i \sin u)$ , unde  $r = |z|$ , iar unghiul  $u \in [0, 2\pi)$  este soluția ecuațiilor trigonometrice:  $r \cos u = a$  și  $r \sin u = b$ .

De exemplu: dacă  $z = -1 - i$ , atunci  $|z| = \sqrt{2}$ ,  $u = \frac{5\pi}{4}$  și  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ .

## 5. Formula lui Moivre

$$\forall u \in \mathbb{R} \text{ și } \forall n \in \mathbb{N}, (\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu)$$

Consecințele formulei lui Moivre

$$\cos nu = \cos^n u + C_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + C_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u + \dots;$$

$$\sin nu = C_n^1 \cos^{n-1} u \sin u + C_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \dots;$$

$$\operatorname{tg} nu = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} u - C_n^2 \operatorname{tg}^3 u + C_n^5 \operatorname{tg}^5 u - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 u + C_n^4 \operatorname{tg}^4 u - \dots}.$$

## 6. Extragerea rădăcinii de ordinul $n$ dintr-un număr complex

$$z = r(\cos u + i \sin u)$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{u + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{u + 2k\pi}{n} \right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$$

## 7. Ecuația binomă

$$x^n - A = 0, A \in \mathbf{C}, A = r(\cos u + i \sin u)$$

Pentru simplificare folosim următoarea notație:  $\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \varepsilon_k$  și  $\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \omega_k$

$$x_k = |A|^{\frac{1}{n}} \omega_k, k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbf{R}, A < 0;$$

$$x_k = A^{\frac{1}{n}} \varepsilon_k, k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbf{R}, A > 0;$$

$$x_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{u + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{u + 2k\pi}{n} \right), k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

### Probleme propuse

1. Să se determine  $x, y \in \mathbf{R}$  știind că  $x(1 + 2i) + y(2 - i) = 4 + 3i$ .
2. Să se determine numerele complexe  $z$ , știind că  $|z| = 1$  și  $(z - 1)(\bar{z} + i) \in \mathbf{R}$ .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $x^2 - 8x + 25 = 0$ .
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ .
5. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $x^2 - 2x + 4 = 0$ .
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $z^2 = -9$ .
7. Să se rezolve în  $\mathbf{C}$  ecuația  $\bar{z}^2 + 3z + 4 = 0$ .
8. Să se rezolve în  $\mathbf{C}$  ecuația  $2\bar{z} + z = 3 + 4i$ .
9. Să se verifice că numărul  $1 + i$  este rădăcină a ecuației  $z^4 + 4 = 0$ .
10. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $z^3 = \bar{z}$ .
11. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $z^5 = \bar{z}$ .
12. Să se calculeze  $z + \frac{1}{z}$  pentru  $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .
13. Știind că  $z \in \mathbf{C}$  și că  $z^2 + z + 1 = 0$ , să se calculeze  $z^4 + \frac{1}{z^4}$ .
14. Știind că  $z \in \mathbf{C}$  și  $z^2 + z + 1 = 0$ , să se calculeze  $z^{2008} + \frac{1}{z^{2008}}$ .
15. Se consideră numărul complex  $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Să se demonstreze că  $z^2 = \bar{z}$ .
16. Să se calculeze  $\frac{4 + 3i}{3 - 4i} - \frac{2 + i}{1 - 2i}$ .
17. Să se calculeze  $\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$ .
18. Să se calculeze  $1 + i + i^2 + \dots + i^{10}$ .
19. Să se calculeze  $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$ .
20. Să se calculeze  $(1 - i)(1 + 2i) - 3(2 - i)$ .
21. Să se calculeze  $(2 + i)^4 + (2 - i)^4$ .
22. Să se calculeze  $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$ .
23. Să se calculeze  $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$ .

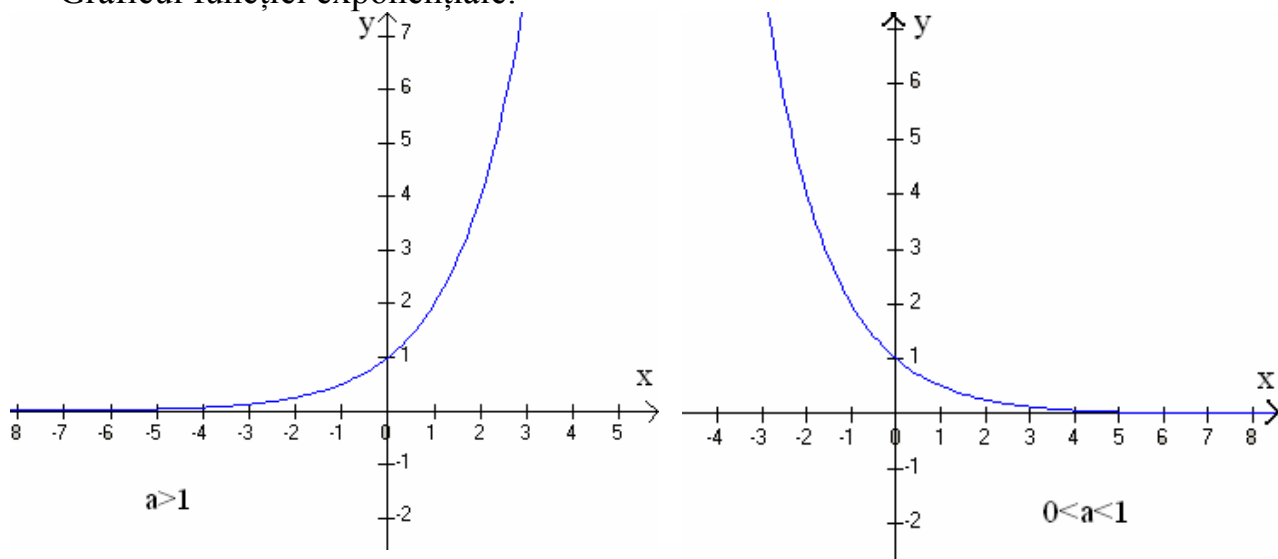
24. Să se calculeze  $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$
25. Să se calculeze  $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$ .
26. Să se calculeze  $1+i+i^2+\dots+i^{10}$ .
27. Să se calculeze  $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$ .
28. Să se arate că numărul  $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i}$  este real.
29. Să se calculeze  $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2008})$ .
30. Să se calculeze  $(2+i)(3-2i) - (1-2i)(2-i)$ .
31. Să se calculeze  $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i}$ .
32. Să se calculeze  $\frac{1+4i}{4+7i} + \frac{1-4i}{4-7i}$ .
33. Să se calculeze  $|5-12i| - |12+5i|$ .
34. Să se determine numerele complexe  $z$  pentru care  $z-1$ ,  $2i$  și  $z+1$  sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.
35. Să se determine  $n \in \mathbf{Z}$  pentru care are loc egalitatea  $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^n$ .
36. Să se determine partea imaginară a numărului  $(1+i\sqrt{3})^3$ .
37. Să se calculeze modulul numărului complex  $1+i+i^2+i^3+\dots+i^6$ .
38. Să se determine partea imaginară a numărului  $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$ .
39. Să se calculeze modulul numărului complex  $z = (3+4i)^4$ .
40. Se consideră  $a \in \mathbf{R}$  și numărul complex  $z = \frac{a+2i}{2+ai}$ . Să se determine  $a$  pentru care  $z \in \mathbf{R}$ .
41. Să se determine partea imaginară a numărului complex  $z = \frac{1-i}{1+i}$ .
42. Să se determine partea reală a numărului complex  $(\sqrt{3}+i)^6$ .
43. Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \frac{8+i}{7-4i}$ .
44. Să se verifice egalitatea  $(1+i\sqrt{3})^2 + (1-i\sqrt{3})^2 = -4$ .

45. Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \frac{2-i}{2+i}$ .
46. Fie  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $z + 2\bar{z} = 3 + i$ . Să se calculeze modulul numărului  $z$ .
47. Fie  $z$  o rădăcină a ecuației  $z^2 + 2z + 4 = 0$ . Să se calculeze modulul numărului complex  $z$ .
48. Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \left(\sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1)\right)^2$ .
49. Să se determine numerele complexe  $z$  care verifică relația  $z + 3i = 6\bar{z}$ .
50. Fie  $z \in \mathbb{C}$  o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze  $1 + z + z^2$ .
51. Fie  $z \in \mathbb{C}$ . Să se arate că  $i(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$ .
52. Fie  $z \in \mathbb{C}$ . Să se arate că dacă  $2z + 3\bar{z} \in \mathbb{R}$ , atunci  $z \in \mathbb{R}$ .
53. Să se arate că numărul  $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{2008}$  este real.
54. Să se determine  $z \in \mathbb{C}$  știind că  $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$ .
55. Să se determine partea reală a numărului complex  $(\sqrt{3} + 1)^6$ .

## Funcția exponențială

**Def.** Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = a^x$  se numește funcția exponențială de bază  $a$ .

Graficul funcției exponențiale:



Proprietăți:

- 1)  $f(0) = a^0 = 1$ , graficul funcției exponențiale taie axa  $Ox$  în  $(0, 1)$ .
- 2) Funcția exponențială este convexă.
- 3) Monotonie: dacă  $a > 1$ , atunci  $f$  este strict crescătoare;  
dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $f$  este strict descrescătoare.
- 4) Dacă  $a > 1$  și  $x > 0 \Rightarrow f(x) > 1$   
 $x < 0 \Rightarrow f(x) < 1$   
 $0 < a < 1$  și  $x > 0 \Rightarrow f(x) < 1$   
 $x < 0 \Rightarrow f(x) > 1$ .
- 5) Funcția exponențială este bijectivă.

## Ecuații exponențiale

Ecuația ce conține variabila necunoscută la exponentul puterii se numește **ecuație exponențială**.

1.  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ . Soluția  $x = \log_a b$ ,  $b \in \mathbf{R}$ .
2.  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \leq 0$ , nu are nici o soluție reală
3. Ecuația exponențială de tipul:

$$a^{f(x)} = b,$$

unde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ , este echivalentă cu ecuația

$$f(x) = \log_a b,$$

4. Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , atunci ecuațiile

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

și

$$f(x) = g(x)$$

sunt echivalente.

5.  $a^x > b$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

| $a$               | $b$     | $S$                   |
|-------------------|---------|-----------------------|
| $a > 1$           | $b > 0$ | $(\log_a b, +\infty)$ |
| $0 < a < 1$       | $b > 0$ | $(-\infty, \log_a b)$ |
| $a > 0, a \neq 1$ | $b < 0$ | $\mathbf{R}$          |

6.  $a^x < b$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

| $a$               | $b$     | $S$                   |
|-------------------|---------|-----------------------|
| $a > 1$           | $b > 0$ | $(-\infty, \log_a b)$ |
| $0 < a < 1$       | $b > 0$ | $(\log_a b, +\infty)$ |
| $a > 0, a \neq 1$ | $b < 0$ | $\emptyset$           |

### Probleme propuse

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2^x + \log_3 x$ . Să se calculeze  $f(1) + f(3)$ .
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{x-2}$ .
3. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2^{x+3} - 2$ .
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ .
5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{x+1} \cdot 2^x = 108$ .
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $(3 + 2\sqrt{2})^x = (1 + \sqrt{2})^2$ .
7. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\frac{1}{2^x} = 4$ .
8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x \cdot 5^x = 15$ .
9. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$ .
10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\frac{1}{2^x} = \frac{4^x}{8}$ .

11. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Să se calculeze  $f(0) + f(1) + \dots + f(4)$ .
12. Să se determine numărul real  $a$ , știind că numerele  $2^a, 4^a + 1$  și  $2^{a+2}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
13. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$ .
14. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x \cdot 3^x = 36$ .
15. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x + 2 \cdot 3^x + 1 = 7$ .
16. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2 - 4x} = \frac{1}{8}$ .
17. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{x^2 + x} = 9$ .
18. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ .
19. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2 + x + 1} = 8$ .
20. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{\sqrt{x-1}} = 4$ .
21. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x^2 + 3x - 2} = 8$ .
22. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ .
23. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ .
24. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{2x-5} = 3^{x^2-8}$ .
25. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $2^{x^2} = 16$ .
26. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x^2-x} = 5^{5x-5}$ .
27. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{2x-1} = 3^{5-x}$ .
28. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2-x} = 4$ .

### Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că pentru orice  $x \in \mathbf{R}$  numerele  $3^x - 1$ ,  $3^{x+1}$  și  $5 \cdot 3^x + 1$  sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

**R.** Dacă  $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}$  sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică, atunci

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \Leftrightarrow 2a_k = a_{k-1} + a_{k+1} \text{ (proprietatea de medie aritmetică). Verificăm această}$$

$$\text{proprietate: } 3^x - 1 + 5 \cdot 3^x + 1 = 6 \cdot 3^x = 2 \cdot 3 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1}.$$

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$ .

**R.**  $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$ , condiția  $x \geq 0$  și obținem:  $3^{x-2} = 3^{-\sqrt{x}} \Rightarrow x-2 = -\sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0$ ,

notăm  $\sqrt{x} = y \Rightarrow$  ecuația  $y^2 + y - 2 = 0$  cu soluțiile  $y_1 = -2$  și  $y_2 = 1$ . Revenim la substituția făcută și obținem:  $\sqrt{x} = -2$  nu are soluții reale și  $\sqrt{x} = 1$  are soluția  $x = 1$ , soluția ecuației.

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $2^x + 2^{x+3} = 36$ .

**R.**  $2^x + 2^{x+3} = 36 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36 \Rightarrow 2^x + 8 \cdot 2^x = 36 \Rightarrow 9 \cdot 2^x = 36 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ .

4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ .

**R.** Ecuația se poate scrie  $(2^2)^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ . Notăm  $2^x = y$  și obținem ecuația  $y^2 - 3y + 2 = 0$  cu soluțiile  $y_1 = 1$  și  $y_2 = 2$ . Revenim la substituție:  $2^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$  și  $2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1$ .  $S = \{0, 1\}$ .

5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+3} - 2^x = 28$ .

**R.**  $2^{x+3} - 2^x = 28 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 - 2^x = 28 \Rightarrow 8 \cdot 2^x - 2^x = 28 \Rightarrow 7 \cdot 2^x = 28 \mid :7 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ .

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $125^x = \frac{1}{5}$ .

**R.**  $125^x = \frac{1}{5} \Rightarrow (5^3)^x = 5^{-1} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{-1} \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ .

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $125^x = \frac{1}{5}$ .

**R.**  $125^x = \frac{1}{5} \Rightarrow (5^3)^x = 5^{-1} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{-1} \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ .

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$ .

**R.**  $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5 \mid \cdot 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 - 14 = -5 \cdot 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 + 5 \cdot 2^x - 14 = 0$ . Notăm  $2^x = y$  și se obține ecuația  $y^2 + 5y - 14 = 0$  cu soluțiile  $y_1 = -7$  și  $y_2 = 2$ . Revenind la necunoscuta  $x \Rightarrow 2^x = -7$  nu are soluție și  $2^x = 2$  cu soluția  $x = 1$ .

9. Să se ordoneze crescător numerele  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ ,  $64$  și  $\sqrt[3]{8}$ .

$$\mathbf{R.} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 2^4, 64 = 2^6, \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2 < 2^4 < 2^6 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} < 64.$$

**10.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$ .

$$\mathbf{R.} 4^{x+2} = 2^{x^2+5} \Rightarrow (2^2)^{x+2} = 2^{x^2+5} \Rightarrow 2x+4 = x^2+5 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1.$$

# Elemente de geometrie analitică

## 1. Segmente

1. Distanța dintre două puncte  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ :  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. Panta dreptei  $AB$ :  $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. Coordonatele  $(x, y)$  ale mijlocului segmentului  $AB$ :  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
4. Coordonatele punctului  $M$  care împarte segmentul  $(AB)$  în raportul  $k$ :  

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{2}$$

## 2. Ecuația dreptei

1. Drepte paralele cu axele de coordonate:  
 $(d): x = a$  ( $d \parallel Oy$ ),  $(d): y = a$  ( $d \parallel Ox$ )
2. Dreapta determinată de punctul  $M_o(x_o, y_o)$  și vectorul nul  $\bar{a}(u, v): (d): r = \bar{r}_o + t\bar{a}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  
 $\bar{r}_o$  -vectorul de poziție a lui  $M_o$ ;  $r$  -vectorul de poziție a unui punct  $M$  al dreptei  $d$ .

$$(d): \begin{cases} x = x_o + ut \\ y = y_o + vt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ ecuațiile parametrice;}$$

3. Ecuația explicită:  $y = mx + n$  ( $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ,  $m$  – panta,  $n$  – ordonata la origine);
4. Ecuația prin tăieturi:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ , ( $a, b \in \mathbb{R}^*$ );
5. Ecuația dreptei de pantă  $m$ , prin punctul  $M_o(x_o, y_o)$ :  $y - y_o = m(x - x_o)$ , ( $m \neq 0$ );
6. Ecuația dreptei determinată de punctele  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2) \text{ sau}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Ecuația generală:  $ax + by + c = 0$ ;

8. Aria triunghiului  $ABC$  ( $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ ):  $A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$ , unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ dacă } \Delta = 0 \text{ atunci } A, B, C \text{ sunt colineare}$$

9. Poziția relativă a dreptelor  $(d_1)$  și  $(d_2)$ :

$$(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ și } (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$d_1 = d_2, \text{ dacă } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$d_1 \parallel d_2, \text{ dacă } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2};$$

$$d_1 \neq d_2 \text{ și } d_1 \cap d_2 \neq \emptyset, \text{ dacă } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

10. Distanța de la punctul  $M_o(x_o, y_o)$  la dreapta  $(h): ax + by + c = 0$

$$d(M, h) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11. Unghiul  $\alpha$  determinat de dreptele:

$$(d_1): y = m_1x + n_1 \text{ și } (d_2): y = m_2x + n_2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad (m_1 m_2 \neq -1)$$

$$d_1 \perp d_2, \text{ dacă } m_1 m_2 = -1$$

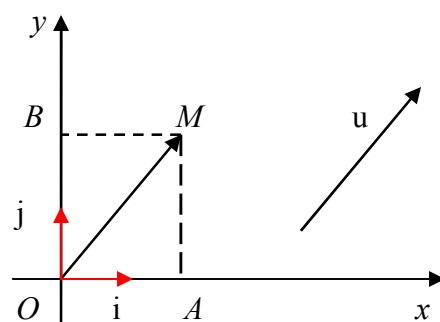
## Vectori

Se numește versor (notat  $\vec{i}$ ) al dreptei  $d$  un vector de lungime 1, care are direcția dreptei  $d$ . Dacă  $A$  aparține lui  $d$  îi asociem un număr real, unic  $x$ , numit coordonata sa. Atunci  $OA = x \cdot \vec{i}$ . Dacă  $x > 0$  atunci  $A$  este în sensul pozitiv al axei  $Ox$ . Dacă  $x < 0$  atunci  $A$  este în sensul negativ al axei  $Ox$ .

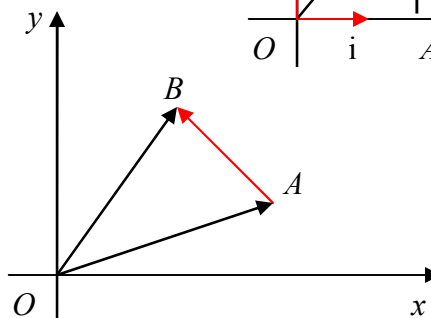
Fie  $Oxy$  un sistem de axe ortogonale.

Fie  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  versorii axelor  $Ox$ , respectiv  $Oy$ .

1. Fie  $\vec{u}$  un vector în plan. Orice vector  $\vec{u}$  poate fi scris în mod unic  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ;

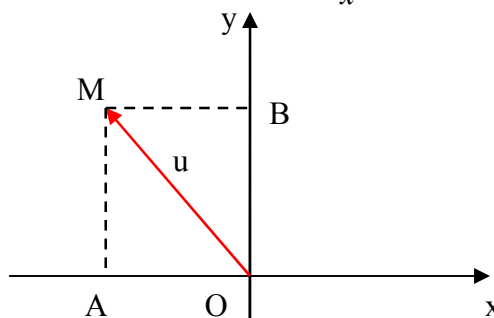


$$2. \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j};$$



3. Modulul unui vector

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



4. Suma a doi vectori

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \quad \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}$$

5. Condiția de paralelism

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \text{ pt. } x_2, y_2 \neq 0$$

6. Condiția de coliniaritate a 3 puncte

$$A, B, C - \text{coliniare} \Leftrightarrow AB \parallel AC \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

7. Condiția de perpendicularitate

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

8. Coordonatele mijlocului unui segment

Fie  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  și  $M(x_M, y_M)$  mijlocul segmentului  $[AB]$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

9. Coordonatele centrului de greutate al unui  $\Delta$

Fie  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_C, y_C)$  și  $G(x_G, y_G)$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

## Probleme propuse

1. Fie punctele  $A(2,-1)$  și  $B(-1,3)$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
2. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,-8)$  și  $B(6,3)$ . Să se determine coordonatele  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .
3. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(2,-1)$  și  $B(1,-2)$ .
4. Să se determine numărul real  $a$  știind că vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$  sunt coliniari.
5. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră vectorii  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $5\vec{u} + 3\vec{v}$ .
6. Să se determine numărul real  $a$  știind că dreptele  $2x-y+3=0$  și  $ax+2y+5=0$  sunt paralele.
7. Se consideră punctele  $A(1,a)$ ,  $B(2,-1)$ ,  $C(3,2)$  și  $D(1,-2)$ . Să se determine numărul real  $a$  știind că dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele.
8. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul  $A(1,1)$  și este paralelă cu dreapta  $4x+2y+5=0$ .
9. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul  $A(2,-3)$  și este paralelă cu dreapta  $x+2y+5=0$ .
10. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  determinat de punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(-1,1)$ ,  $C(3,5)$  în reperul cartezian  $xOy$ .
11. Să se determine ecuația dreptei care conține punctele  $A(2,3)$  și  $B(-3,-2)$ .
12. Să se calculeze aria triunghiului echilateral  $ABC$  știind că  $A(-1,1)$  și  $B(3,-2)$ .
13. Să se calculeze lungimea segmentului  $AB$ , determinat de punctele  $A(2,3)$  și  $B(5, -1)$ , în reperul cartezian  $xOy$ .
14. Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ , știind că  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt vârfurile unui triunghi.
15. Să se determine coordonatele punctului  $C$  știind că el este simetricul punctului  $A(5,4)$  față de punctul  $B(-2,1)$ .
16. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se arate că  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
17. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2,-3)$  și  $\overrightarrow{OB}(1,-2)$ . Să se determine numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  pentru care vectorul  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$  are coordonatele  $(\alpha, \beta)$ .
18. Să se determine numărele reale  $a$ , știind că lungimea segmentului determinat de punctele  $A(-1,2)$  și  $B(4-a,4+a)$  este egală cu 5.
19. Să se determine distanța dintre punctele  $A(3,-1)$  și  $B(-1,2)$ .
20. Dacă  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ , să se determine valoarea raportului  $\frac{AB}{BC}$ .
21. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,1)$  și  $B(-1,2)$ . Să se determine coordonatele punctului  $C \in (AB)$  astfel încât  $\frac{CA}{CB} = 2$ .
22. Să se determine valorile reale ale lui  $m$  astfel încât punctele  $A(1,3)$ ,  $B(2,5)$  și  $C(3,m)$  să fie coliniare.

23. Să se determine coordonatele punctului  $B$ , știind că  $C(3,5)$  este mijlocul segmentului  $AB$  și că  $A(2,4)$ .
24. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(3,0)$  și intersectează axa  $Oy$  în punctul de ordonată 4.
25. Să se determine lungimea înălțimii din  $O$  în triunghiul  $MON$ , unde  $M(4,0), N(0,3)$  și  $O(0,0)$ .
26. Să se determine  $m \in \mathbf{R}$  pentru care distanța dintre punctele  $A(2,m)$  și  $B(-m,-2)$  este egală cu  $4\sqrt{2}$ .
27. Să se determine  $m \in \mathbf{R}$  pentru care punctele  $A(2,4), B(3,3)$  și  $C(m,5)$  sunt coliniare.
28. Se consideră reperul cartezian  $xOy$  și punctele  $A(1,-1)$  și  $B(3,5)$ . Să se determine coordonatele punctului  $C$  din plan astfel încât  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ .
29. Se consideră dreptele distincte  $d_1: ax+2y=2$  și  $d_2: 8x+ay=4$ . Să se determine valorile parametrului real  $a$  astfel încât dreptele  $d_1$  și  $d_2$  să fie paralele.
30. Să se calculeze lungimea medianei din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$  știind că  $A(2,3)$ ,  $B(2,0)$  și  $C(0,2)$ .
31. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(2,3)$ . Știind că punctele  $B$  și  $C$  sunt simetricele punctului  $A$  față de axele  $Ox$ , respectiv  $Oy$ , să se calculeze lungimea segmentului  $BC$ .
32. Să se calculeze distanța de la punctul  $A(-6,8)$  la originea reperului cartezian  $xOy$ .
33. Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , știind că punctele  $A(a,b)$  și  $B(a-1, 4)$  aparțin dreptei de ecuație  $x+y-5=0$ .
34. Fie punctele distincte  $A, B, C, D$  nu toate coliniare. Știind că  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ , să se demonstreze că patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram.
35. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(1,-1)$  și este paralelă cu dreapta  $y=x$ .
36. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații  $2x+y-4=0$  și  $x+y-3=0$ .
37. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0;a)$ ,  $B(-1;2)$  și  $C(4;5)$ , unde  $a$  este un număr real. Să se determine valorile lui  $a$  pentru care triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ .
38. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,2)$  și  $B(4,4)$ . Să se determine coordonatele mijlocului segmentului  $AB$ .
39. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(4;0)$  și  $B(0;2)$ .
40. Să se determine lungimea medianei din  $A$  a triunghiului  $ABC$ , știind că vârfurile acestuia sunt  $A(0;4)$ ,  $B(-2;0)$  și  $C(8;0)$ .
41. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(1,-2)$  și are panta egală cu 2.
42. Să se determine coordonatele punctului  $M$  care aparține dreptei  $AB$  și care este egal depărtat de punctele  $A(1;-1)$  și  $B(5;-3)$ .
43. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,0)$ ,  $B(x,y)$ ,  $C(5,-2)$ . Să se determine numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât punctul  $B$  să fie mijlocul segmentului  $AC$ .
44. Să se demonstreze că, în hexagonal regulat  $ABCDEF$ , are loc relația  $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF})$ .
45. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(2,1)$  și  $B(1,-2)$ .

46. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,0)$  și  $B(m^2-1,0)$ , cu  $m \in \mathbf{R}$ . Să se determine valorile reale ale lui  $m$  astfel încât punctul  $C(5,0)$  să fie mijlocul segmentului  $AB$ .
47. Se consideră patrulaterul  $ABCD$  în care  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Să se demonstreze că  $ABCD$  este paralelogram.
48. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $N$ , simetricul punctului  $M(-2,3)$  față de punctul  $O$ . Să se calculeze lungimea segmentului  $MN$ .
49. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(5,2)$  și  $C(3, -1)$ . Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ .
50. Să se determine numărul real pozitiv  $a$  astfel încât distanța dintre punctele  $A(2,-1)$  și  $B(-1,a)$  să fie egală cu 5.

**Probleme propuse**

1. Fie punctele  $A(2,-1)$  și  $B(-1,3)$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
2. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,-8)$  și  $B(6,3)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .
3. Să se determine numărul real  $a$  știind că vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$  sunt coliniari.
4. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră vectorii  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $5\vec{u} + 3\vec{v}$ .
5. Să se determine coordonatele punctului  $B$ , știind că  $A(3,4)$  și  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ .
6. Se consideră vectorii  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  și  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$ .
7. Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ , știind că  $A, B$  și  $C$  sunt vârfurile unui triunghi.
8. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se arate că  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
9. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2,-3)$  și  $\overrightarrow{OB}(1,-2)$ . Să se determine numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  pentru care vectorul  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$  are coordonatele  $(\alpha, \beta)$ .
10. Dacă  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ , să se determine valoarea raportului  $\frac{AB}{BC}$ .
11. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2,-1)$  și  $\overrightarrow{OB}(1,2)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
12. Fie  $ABC$  un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO}$ .
13. Să se determine numărul real  $m$  pentru care vectorii  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$  sunt coliniari.

**Rezolvare:**

1. Vectorul determinat de două puncte  $A(x_1, y_1)$  și  $B(x_2, y_2)$  este  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$  și se obține  $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\vec{i} + (3 - (-1))\vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Atunci  $a = -3$  și  $b = 4$ .

2.  $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$  și obținem  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4 + 6)\vec{i} + (-8 + 3)\vec{j} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$ .  
Coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  sunt  $(10, -5)$ .

3. Doi vectori  $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  și  $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$  sunt coliniari dacă  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ . Obținem:

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \Rightarrow 3a = 2a - 4 \Rightarrow a = -4.$$

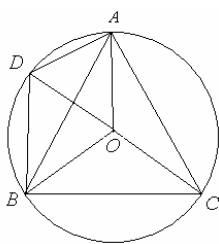
4.  $5\vec{u} + 3\vec{v} = 5(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3(5\vec{i} - \vec{j}) = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{i} - 3\vec{j} = 7\vec{j}$ .

5. Punctul  $B(x, y)$  și  $\overrightarrow{AB} = (x - 3)\vec{i} + (y - 4)\vec{j}$ . Atunci  $x - 3 = 1$  și  $y - 4 = 1$  se obține  $x = 4$  și  $y = 5$  iar  $B(4, 5)$ .

6.  $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{i} + 9\vec{j} = 17\vec{j}$ .

7.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  după regula triunghiului, iar  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$  și atunci  
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .

8.



$[OA] = [OB] = [OC]$  raza cercului circumscris

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ , regula paralelogramului

$AOBD$  este romb și  $\triangle AOD$  este echilateral, atunci

$[OA] = [OD]$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$ .

Avem  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

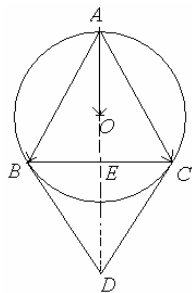
9.  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  și  $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j}$ , iar  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} = 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) - 5(\vec{i} - 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{i} + 10\vec{j} = \vec{i} + 5\vec{j}$  și atunci  $\alpha = 1$  și  $\beta = 5$ .

10. Din  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 2$

11. Din  $M$  mijlocul segmentului  $AB \Rightarrow$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \text{ și } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2}, M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ și } \overrightarrow{OM}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

12.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \text{ și } ABDC \text{ romb} \Rightarrow AD = 2AE \text{ și}$$

$$AO = \frac{2}{3} AE \Rightarrow AE = \frac{3}{2} AO, \text{ atunci } AD = 3AO \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0}.$$

13.  $\frac{2}{-1} = \frac{3}{m} \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$