Marius PERIANU
Cătălin STĂNICĂ
Ioan BALICA
Cătălin MÎINESCU
Cristian LAZĂR

CLUBUL MATEMATICIENILOR



Matematică

EVALUAREA NAȚIONALĂ

pentru absolvenții clasei a VIII-a

Teme, probleme și teste de verificare

2017

CLUBUL MATEMATICIENILOR

Clubul matematicienilor este un proiect dezvoltat de Grupul Editorial Art.

Copyright © 2015

ART Grup Editorial

Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin editurii.
Reproducerea integrală sau parţială a conţinutului lucrării
este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii.

ințifici:
ircea Cornel Popescu
arcisa Daniela Stănică
istina Ritzi

tare:
hia

)aș

Descrierea CIP este disponibilă la Biblioteca Națională a României

978-606-710-287-1

Pentru **comenzi** vă puteți adresa:

Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, Cod: 062650, sector 6, București

telefon
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870
Se acordă importante **reduceri**.

CNI CORESI

Cuprins

Partea 1. Aritmetică/Algebră

Tema 1.1. Numere naturale. Operaţii cu numere naturale (clasa a V-a) 7
Tema 1.2. Numere întregi (clasa a VI-a) 13
Tema 1.3. Divizibilitate (clasele V-VI) 16
Tema 1.4. Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale (clasele V-VI-VII) 25
Tema 1.5. Rapoarte. Proporţii. Procente. Probabilităţi (clasele VI-VII) 33
Tema 1.6. Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali (clasele VII-VIII) 42
Tema 1.7. Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori (clasele VII-VIII) 49
Tema 1.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere (clasa a VIII-a) 54
Tema 1.9. Funcţii (clasa a VIII-a) 61
Tema 1.10. Ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, al inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii (clasele V-VI-VII-VIII) 67

Partea 2. Geometrie

Tema 2.1. Unghiuri. Triunghiuri (clasa a VI-a) 77
Tema 2.2. Patrulatere (clasa a VII-a) 85
Tema 2.3. Asemănare (clasa a VII-a) 92
Tema 2.4. Relaţii metrice (clasa a VII-a) 100
Tema 2.5. Cercul (clasa a VII-a) 106
Tema 2.6. Incidenţă, paralelism şi perpendicularitate în spaţiu (clasa a VIII-a) 112
Tema 2.7. Corpuri geometrice. Arii şi volume (clasa a VIII-a) 124

Partea 3. Variante de subiecte

3.1. Subiecte date la Evaluarea Naţională în anii 2010 – 2014 135
3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare 190

Soluţii 254

Aritmetică / Algebră 1

Clasele V-VIII

Tema 1.1. Numere naturale. Operaţii cu numere naturale
(clasa a V-a)

Tema 1.2. Numere întregi
(clasa a VI-a)

Tema 1.3. Divizibilitate
(clasele V-VI)

Tema 1.4. Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale
(clasele V-VI-VII)

Tema 1.5. Rapoarte. Proporţii. Procente. Probabilităţi
(clasele VI-VII)

Tema 1.6. Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali
(clasele VII-VIII)

Tema 1.7. Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori
(clasele VII-VIII)

Tema 1.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere
(clasa a VIII-a)

Tema 1.9. Funcţii
(clasa a VIII-a)

Tema 1.10. Ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, al inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii
(clasele V-VI-VII-VIII)

Tema 1.1
Numere naturale. Operaţii cu numere naturale

Mulţimea $\{0,1,2,3,4,...\}$ a numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

Mulţimea $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ este mulţimea numerelor naturale nenule; ea se notează cu $\mathbb{N}^*$.

Cu numerele naturale putem efectua următoarele operaţii:
- operaţii de ordinul I: adunarea şi scăderea;
- operaţii de ordinul II: înmulţirea şi împărţirea;
- operaţii de ordinul III: ridicarea la putere.

Proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor naturale

a. Comutativitatea: pentru orice numere naturale a şi b avem: $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$.

b. Asociativitatea: pentru orice numere naturale a, b, c avem: $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{cases}$.

c. 0 este element neutru la adunare: $a+0=0+a=a$, pentru orice număr natural a.
1 este element neutru la înmulţire: $a\cdot 1=1\cdot a=a$, pentru orice număr natural a.

d. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare şi faţă de scădere: $\begin{cases} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \end{cases}$.

Operaţiile cu numere naturale şi relaţiile de egalitate/inegalitate

1. Fiind dată o egalitate $a=b$ între două numere naturale, egalitatea se păstrează dacă:
- **a.** în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a+c=b+c$;
- **b.** din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a-c=b-c$;
- **c.** ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$;
- **d.** ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a=b\Rightarrow a:c=b:c$.

2. Adunând sau înmulţind membru cu membru două egalităţi, egalitatea se păstrează:

dacă $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ atunci $\begin{cases} a+c=b+d \\ a\cdot c=b\cdot d \end{cases}$.

3. Fiind dată o inegalitate $a\le b$ între două numere naturale, inegalitatea se păstrează dacă:
- **a.** în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a+c\le b+c$;
- **b.** din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a-c\le b-c$;
- **c.** ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$;
- **d.** ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a:c\le b:c$.

Teorema împărţirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b\neq 0$, există numerele naturale q şi r, unic determinate, astfel încât: $a=b\cdot q+r$ şi $0\le r<b$.

Numărul q se numeşte *câtul împărţirii*, iar numărul r se numeşte *rest*.

Exemplu. Fiind date numerele 23 şi 5, există şi sunt unice numerele naturale 4 şi 3 astfel încât să avem: $23=4\cdot 5+3$ şi $3<5$. Deci $23:5=4$ rest 3.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Fie a şi n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numeşte puterea a n-a a numărului natural a şi se notează a^n.

Scrierea a^n se citeşte „a la puterea n" sau „puterea a n-a a numărului a". În această scriere, a se numeşte *baza* puterii, iar n se numeşte *exponentul* puterii.

Aşadar: $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, şi, în general, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$, pentru $n \geq 2$.

Prin convenţie, $a^1 = a$ şi $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural se numesc *pătrate perfecte*.

Exemple. 81 şi 225 sunt pătrate perfecte, pentru că $81 = 9^2$ şi $225 = 15^2$.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc *cuburi perfecte*.

Exemple. 27, 125 şi 64 sunt cuburi perfecte, întrucât $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $64 = 4^3$.

Ultima cifră a puterii unui număr natural. Deoarece ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, avem:

1. Numerele care se termină cu cifrele 0, 1, 5, 6, ridicate la orice putere nenulă, se vor termina cu aceleaşi cifre.
2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2:
   a. puterile impare ale numerelor terminate în 4 se termină în 4, iar puterile pare nenule se termină în 6;
   b. puterile impare ale numerelor terminate în 9 se termină în 9, iar puterile pare nenule se termină în 1.
3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8, se repetă din 4 în 4.

Reguli de calcul cu puteri. Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$.

1. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Împărţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $m \geq n$
3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \vdots b$.

Observaţie. Sunt situaţii în care identităţile de mai sus se folosesc şi sub forma:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ 2. $a^{m-n} = a^m : a^n$ 3. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ - regula de înmulţire a puterilor cu acelaşi exponent
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$ - regula de împărţire a puterilor cu acelaşi exponent

Ordinea efectuării operaţiilor

1. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de acelaşi ordin acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Pentru a uşura calculul, putem folosi proprietăţile de comutativitate şi asociativitate ale adunării şi înmulţirii:

Exemple. a. $27 + 15 - 32 = 42 - 32 = 10$. b. $32 \cdot 5 : 8 \cdot 2 = 160 : 8 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$.
c. $137 + 455 + 63 + 45 = (137 + 63) + (455 + 45) = 200 + 500 = 700$.
d. $4 \cdot 231 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 231 = 100 \cdot 231 = 23\,100$.

2. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de ordine diferite se efectuează, dacă există, mai întâi operaţiile de ordinul trei, apoi operaţiile de ordinul doi şi, în final, operaţiile de ordinul întâi, respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. a. $24 : 2^3 \cdot 5 = 24 : 8 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$.
b. $340 : 17 + (5^4)^3 : 5^{10} - 700 : 35 = 340 : 17 + 5^{12} : 5^{10} - 700 : 35 =$
$= 340 : 17 + 5^2 - 700 : 35 = 340 : 17 + 25 - 700 : 35 = 20 + 25 - 20 = 25$.

3. Dacă într-un exerciţiu există şi paranteze, se efectuează mai întâi toate operaţiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (dacă există) şi în final din acolade (dacă există) şi în final ce avem în afara acoladelor (dacă există), respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. a. $(38 + 275 : 25) \cdot 10 - 34 \cdot 11 = (38 + 11) \cdot 10 - 374 = 49 \cdot 10 - 374 = 116$.
b. $40 \cdot [100 : 4 + 5 \cdot (3^2 + 48048 : 24)] + 2011 =$
Calculăm paranteza rotundă: $3^2 + 48048 : 24 = 9 + 2002 = 2011$.
Calculăm paranteza dreaptă: $100 : 4 + 5 \cdot 2011 = 25 + 10055 = 10080$.
Reconstituim exerciţiul: $40 \cdot 10080 + 2011 = 403200 + 2011 = 405211$.

Factoriale. Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ şi se citeşte „n *factorial*". Prin convenţie, $0! = 1$.

Exemple. $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5040$.

Suma primelor n numere naturale nenule. Sume Gauss

Teoremă. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = n(n+1) : 2.}$$

Într-adevăr, notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$

Adunând membru cu membru cele două relaţii, obţinem:

$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 1 + 2) + (n + 1)$,

adică $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n(n+1)$, de unde rezultă $S = n(n+1) : 2$.

La fel putem proceda pentru a calcula suma unor numere care se obţin numărând din r în r începând de la primul termen al sumei, unde $r \neq 0$ este un număr natural dat.

Exemplu. Calculaţi suma $S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$.

Mai întâi aflăm numărul de termeni ai sumei (cu ***metoda contorului***). Termenii sumei sunt din 3 în 3 şi, observând că $20 = 3 \cdot \mathbf{6} + 2$, $23 = 3 \cdot \mathbf{7} + 2$ ..., $257 = 3 \cdot \mathbf{85} + 2$, rezultă că numărul termenilor sumei este egal cu numărul de numere naturale de la 6 la 85, adică $85 - 6 + 1 = 80$.

Scriem suma cu termenii aşezaţi în ordine crescătoare, apoi, sub ea, aceeaşi sumă, cu termenii aşezaţi în ordine descrescătoare, după care adunăm termen cu termen.

$S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$
$S = 257 + 254 + 251 + \ldots + 23 + 20$

$2S = \underbrace{277 + 277 + 277 + \ldots + 277 + 277}_{80 \text{ termeni (numărul termenilor sumei } S)} = 80 \cdot 277 = 22160$, deci $S = 22160 : 2 = 11080$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Scrierea numărului trei sute de mii opt este egală cu ... .

2. Cel mai mic număr natural de trei cifre cu cifra zecilor 7 este egal cu ... .

3. Aproximarea lui 345672 prin lipsă, la mii este egală cu ... .

4. Dintre numerele $a = 102030$, $b = 123450$ și $c = 102100$ mai mare este ... .

5. Cel mai mic număr natural cu produsul cifrelor 12 este egal cu ... .

6. Secvența 3, 6, 9, 12, ..., 33 conține un număr de ... numere naturale.

7. Numărul numerelor naturale impare de forma $\overline{a2b}$ este egal cu ... .

8. Dacă pe axa numerelor sunt reprezentate punctele $O(0), A(11), B(7)$ și $C(23)$, atunci ordinea punctelor O, A, B, C pe axă este ... .

9. Rezultatul calculului 19027 + 9278 este egal cu ... .

10. Rezultatul calculului $1006 - 297$ este egal cu ... .

11. Rezultatul calculului $208 \cdot 17$ este egal cu ... .

12. Rezultatul calculului $12 - 4 \cdot 2 + 3$ este egal cu ... .

13. Dacă $ab + ac = 15$ și $b + c = 5$, atunci valoarea numărului a este egală cu ... .

14. Rezultatul calculului $5 + 10 + 15 + ... + 40$ este egal cu ... .

15. Suma a trei numere naturale consecutive este 21. Produsul numerelor este egal cu ... .

16. Numărul zerourilor în care se termină produsul primelor 21 de numere naturale nenule este egal cu ... .

17. Rezultatul calculului $1^4 + 2^0$ este egal cu ... .

18. Numărul pătratelor perfecte din secvența 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 este egal cu ... .

19. Ultima cifră a numărului 2^{2013} este egală cu ... .

20. Dacă $1 + 3 + 5 + ... + 13 = x^2$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ... .

21. Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu ... .

22. Dintre numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$, mai mic este numărul ... .

23. Dintre numerele $x = 2^{55}$, $y = 2^{33}$ și $z = 2^{44}$, cub perfect este numărul ... ..

24. Dacă $2^6 \cdot 4^7 \cdot 8^8 = 2^x$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ... .

25. Numărul natural care împărțit la 17 dă câtul 9 și restul 15 este egal cu ... .

26. Suma resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 5 este egală cu ... .

27. Suma a două numere naturale este 32. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 5 și restul 2. Numărul mai mic este egal cu ... .

28. Numărul numerelor naturale care împărțite la 4 dau câtul 3 este egal cu ... .

29. Un număr natural n dă restul 3 la împărțirea cu 4. Restul împărțirii numărului n la 2 este egal cu ... .

30. Numărul care împărțit la 7 dă câtul 9 și restul 5 este egal cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

31. Se știe că $a + b + c = 7$. Calculați:
a) $2a + 2b + 2c$; *b)* $10a + 10b + 10c$; *c)* $a \cdot 13 + b \cdot 13 + c \cdot 13 + 21$.

32. Se știe că $a = 11$ și $b + c = 8$. Calculați:
a) $ab + ac$; *b)* $2a + 3b + 3c$; *c)* $10a + 9b + 9c$;
d) $ab + ac + 25$; *e)* $ab + ac - 34$; *f)* $7b + 7c + 9a$;

33. Se știe că $a + b + c = 23$ și $x = 9$. Calculați:
a) $14a + 14b + 14c + 14x$; *b)* $2013 - (53a + 53b + 53c + 10x)$;
c) $349 + 6a + 6b + 6c - 12x$; *d)* $424 - 21x + 3a + 3b + 3c$;

34. Calculați, scoțând factor comun:
a) $13 \cdot 5 + 13 \cdot 21 + 13 \cdot 40$; *b)* $437 \cdot 109 - 437 \cdot 54 + 437 \cdot 203$;
c) $49 \cdot 135 - 49 \cdot 27 + 49 \cdot 11$; *d)* $2011 \cdot 5 + 2011 \cdot 7 + 2011 \cdot 49 + 2011 \cdot 39$;

35. Dacă $x = 5$ și $a + b = 13$, calculați:
a) $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; *b)* $xa + xb - 50$;
c) $10 \cdot x - (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; *d)* $(4a + 4b - 2x) \cdot (2a + 2b + x)$.

36. Calculați numărul x știind că $a - b = 6$ și:
a) $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; *b)* $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c) $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; *d)* $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2011$.

37. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a + b + c = 57$ și $2a + b + 2c = 73$, calculați $(a + c) \cdot (5 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \cdot c)$.

38. *a)* Dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$, calculați $3a + 7b + 4c$.
b) Dacă $a + b = 33$ și $a + c = 11$, calculați $5a + 3b + 2c$.

39. Știind că $x + 3y = 2y + z = 14$, calculați:
a) $x + 5y + z$; *b)* $3x + 15y + 3z$; *c)* $5x + 11y - 2z$; *d)* $5x + 19y + 2z$.

40. Produsul a două numere este 672. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 992. Determinați cele două numere.

41. Produsul a două numere este 1530. Micșorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 850. Determinați cele două numere.

42. Produsul a trei numere consecutive este cu 48 mai mare decât produsul primelor două. Determinați cele trei numere naturale.

43. Efectuați:
a) $11 + 8 \cdot \{45 + 4 \cdot [3 + 8 \cdot (12 \cdot 13 - 8 \cdot 14) - 37]\} + 1234$;
b) $(32 \cdot 15 - 32 \cdot 5) + 11 \cdot 12 + 7 \cdot \{124 - 5 \cdot [210 - 2 \cdot (23 \cdot 17 - 24 \cdot 12)]\}$;
c) $12 + 12 \cdot \{12 + 12 \cdot [12 + 12 \cdot (12 \cdot 12 - 122)]\} + 12 \cdot 12$;
d) $[100 - 3 \cdot (13 \cdot 19 - 12 \cdot 18)] \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (5 + 6 \cdot 7)]\}$;
e) $2483 - 23 \cdot [15 + 5 \cdot (127 - 119)] + 32 \cdot [178 - 5 \cdot (345 - 328)]$;
f) $\{[19 \cdot 6 - 107 + 12 \cdot 8] \cdot 2 - 176\} + [5467 - 16 \cdot (324 - 319)]$.

44. *a)* Determinați numerele naturale n, pentru care $8^n + 8^{n+1} = 18 \cdot 2^{2003}$.
b) Determinați numerele naturale n, pentru care $9^n + 9^{n+1} = 10 \cdot 3^{2012}$.

c) Determinați numerele naturale n, pentru care $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{55}$.
d) Determinați numerele naturale n, pentru care $7^{n+1} + 7^{n+2} = 8 \cdot 7^{11}$.

45. *a)* Arătați că numărul $a = 2003 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2002)$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2011$ este pătrat perfect.
c) Arătați că numărul $a = 81 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 81 + \ldots + 49 \cdot 81$ este pătrat perfect.

46. *a)* Câte pătrate perfecte se găsesc între numerele 100 și 1000 ?
b) Câte numere naturale pătrate perfecte se află între 2000 și 3000?

47. Arătați că numerele naturale, de forma $5 \cdot (n + 1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n.

48. Un număr natural este de 7 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 86 și mai mic decât 94?

49. Un număr natural este de 9 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 149?

50. Un număr natural este de 13 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 155?

51. *a)* Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul 103.
c) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 32.

52. Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.

53. Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați numerele.

54. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.

55. *a)* Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 7 dau restul egal cu câtul.
b) Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.

56. Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărțind a la b obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe b la c obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.

57. Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.

58. Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.

59. Suma a două numere naturale este 334. Împărțind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obținem câtul 36 și restul 7. Determinați numerele.

60. Diferența a două numere naturale este 149. Împărțind numărul mai mare la jumătatea numărului mai mic obținem câtul 16 și restul 9. Determinați numerele.

Tema 1.2
Numere întregi

Numerele întregi pozitive, numerele întregi negative și numărul 0 formează *mulțimea numerelor întregi*. Pentru scrierea acesteia se folosește simbolul $\mathbb{Z}$.

Avem $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ sau $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$.

Observații

1. Numărul 0 nu este pozitiv și nici negativ.
2. Numerele întregi negative sunt folosite pentru a descrie temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, adâncimi sub nivelul mării, datorii etc.
3. Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale: $1 = +1$; $2 = +2$; $3 = +3$ etc. Putem scrie aceasta printr-o relație între mulțimi $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}^*$.

Opusul unui număr întreg. În general, dacă n este un număr natural nenul, atunci:
- opusul numărului întreg pozitiv $+n$ este numărul întreg negativ $-n$.
- opusul numărului întreg negativ $-n$ este numărul întreg pozitiv $+n$.

Opusul numărului 0 este tot numărul 0, deoarece $+0 = -0 = 0$. Opusul unui număr întreg x (fie pozitiv fie negativ) se notează cu $-x$.

Modul. *Valoarea absolută* sau *modulul* unui număr întreg a este distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează cu $|a|$.

1. Modulul unui număr pozitiv p este egal cu numărul însuși: $|p| = p$.
2. Modulul unui număr negativ $-n$, $n \in \mathbb{N}$, este egal cu opusul său: $|-n| = -(-n) = +n$.
3. $|a| \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $a = 0$.

Exemple: **a.** $|+3| = 3$; **b.** $|-4| = 4$; **c.** $|0| = 0$.

Operații cu numere întregi

Operațiile cu numere naturale se prelungesc la mulțimea numerelor întregi, ținând cont de următoarele reguli:

Adunarea
a. Suma a două numere întregi cu același semn este numărul întreg care are:
- modulul egal cu suma modulelor termenilor;
- același semn ca termenii sumei.

b. Suma a două numere întregi cu semne diferite este numărul întreg care are:
- modulul egal cu modulul diferenței modulelor termenilor;
- semnul egal cu semnul termenului mai mare în modul.

c. Suma a două numere întregi opuse este 0.

Scăderea Diferența a două numere întregi este egală cu suma dintre primul termen și opusul celui de-al doilea.

Înmulțirea Produsul a două numere întregi este numărul întreg care are:
- modulul egal cu produsul modulelor factorilor;
- semnul „+" dacă factorii au același semn și semnul „–" dacă factorii au semne contrare.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Opusul numărului întreg $a = 5 - 7$ este ... .

2. Un număr întreg pozitiv se numește ... .

3. Suma $3 + (-7) + (-10)$ este egală cu ... .

4. Numărul întreg mai mare ca -5 și mai mic decât -3 este egal cu ... .

5. Se știe că $a = -13$, $b = 13$, $c = 27$. Atunci $a - b + c$ este egal cu ... .

6. Se știe că $m = 11, n = -7, p = 13$. Atunci $m + 2n - 3p$ este egal cu ... .

7. Rezultatul calculului $(-5)\cdot(+12):(-10)$ este egal cu ... .

8. Primul număr întreg mai mic decât -11 este egal cu ... .

9. Succesorul numărului întreg -28 este ... .

10. Predecesorul numărului întreg $+11$ este ... .

11. Rezultatul calculului $(-2)^3\cdot(-4)^2:(-2)^5$ este ... .

12. Numărul întreg $a = (-9)^7\cdot 3^{10}:(-3)^{17}$ este egal cu ... .

13. Se știe că $b = [13 + (-8 + 10)]:(-5)$. Atunci $2\cdot b$ este egal cu ... .

14. Dacă $n = (-2)^6\cdot[-3 + (15 - 4)]:2^8$, atunci n este egal cu ... .

15. Se știe că $5 < n < 7$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci $-2n + 6$ este egal cu ... .

16. Dacă $a = (-1)^{n^2+3n}$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $-10\cdot a$ este egal cu ... .

17. Soluția ecuației $2x + 17 = -3x + 7$ este reprezentată de numărul întreg ... .

18. Cel mai mare număr întreg, soluție a inecuației $5x - 10 < -2x + (-24)$, este ... .

19. Cel mai mic număr întreg, soluție a inecuației $7x - 11 \geq -3x - 19$, este ... .

20. Numărul de numere întregi ce verifică $5 < 3x - 15 \leq 23$, este ...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Numerele întregi a și b au raportul 3 și suma -16. Determinați numerele a și b.

22. Să se calculeze $a + (-3)\cdot b$, unde $a = 13 - (-15)$ și $b = 21:(-7)$.

23. Știind că $m = (-18):(-6)$, $n = (-7)\cdot 2$, să se calculeze $3\cdot m - 5\cdot n$.

24. Calculați $(-1)^{10} + (-1)^{11} + ... + (-1)^{20}$.

25. Calculați $(-1)^1 - (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 + (-1)^5$.

26. Să se compare numerele întregi $(-2)^{30}$ și $(-3)^{20}$.

27. Să se determine numărul de numere întregi mai mari decât -11 și mai mici decât 13.

28. Să se calculeze suma tuturor numerelor întregi mai mari sau egale cu -11 și mai mici decât 15.

29. Comparați numerele întregi $(-3)^{21}$ și $(-2)^{35}$.

30. Să se determine valoarea numărului $a = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 21 - 22$.

31. Calculați $(-2)^{21}:4^{10} + 3^{10}:(-9)^3 - (-5)^{11}:25^5$.

32. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -13 < x \leq 19\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulțimii A.
b) Să se calculeze suma tuturor elementelor mulțimii A.

33. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq 2x + 3 < 20\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulțimii A.
b) Să se calculeze suma elementelor mulțimii A.

34. Să se determine toate numerele întregi n care verifică $|2n + 1| = 7$.

35. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x| < 21\}$. Să se determine numărul de elemente al mulțimii A.

36. Să se rezolve ecuația $|3x - 1| + (-12) = 14$, știind că $x \in \mathbb{Z}$.

37. Să se determine cel mai mic număr întreg pozitiv care este soluție pentru inecuația $|2x + 3| \geq 12$.

38. Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y), știind că $5xy + 2y = 14$.

39. Să se rezolve ecuația $x + 3x + 5x + ... + 13x = -490$, știind că $x \in \mathbb{Z}$.

40. Să se demonstreze că ecuația $(3x + 2)\cdot(5y + 3) = 9$ nu are soluții întregi.

Tema 1.3
Divizibilitate

Divizibilitate. Numărul natural a se divide (este divizibil) cu numărul natural b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Pentru a nota relația de divizibilitate, vom scrie într-unul din modurile:

- $a \vdots b$ care se citește „a se divide cu b" sau „a este multiplu al lui b";
- $b \mid a$ care se citește „b divide a" sau „b este un divizor al lui a".

a este divizibil cu b	b divide pe a	a este produsul factorilor b și c
$a \quad \vdots \quad b$	$b \quad \mid \quad a$	$a \quad = \quad b \quad \cdot \quad c$
↓ ↓	↓ ↓	↓ ↓ ↓
multiplu divizor	divizor multiplu	multiplu divizor divizor

Observații.

1. Alte simboluri folosite sunt: $\not\vdots$ (citim „nu se divide cu") și $\nmid$ (citim „nu divide").

2. Dacă a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci a este divizibil cu b, dacă restul împărțirii lui a la b este egal cu zero.

3. Numărul natural 0 este divizibil cu orice număr natural, iar 0 divide doar pe 0.

Exemple: **1.** $24 \vdots 8$, deoarece $24 = 8 \cdot 3$. **2.** $3 \mid 15$, deoarece $15 = 3 \cdot 5$.

3. $119 \vdots 7$, deoarece $119 : 7 = 17$, rest 0.

4. $2415 \not\vdots 13$, deoarece $2415 : 13 = 185$, rest 10.

Divizori improprii. Divizori proprii. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Numerele 1 și a se numesc divizori *improprii* ai numărului a. Ceilalți divizori ai lui a (dacă există) se numesc divizori *proprii*.

Deoarece orice număr natural este divizor al numărul natural 0, iar numărul natural 1 are un singur divizor, și anume pe 1, nu se pune problema existenței divizorilor proprii, respectiv improprii, pentru numerele 0 și 1.

Exemplu: Divizorii improprii ai lui 10 sunt 1 și 10, iar divizorii proprii sunt 2 și 5.

Mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n este mulțimea D_n a tuturor numerelor naturale care divid pe n. Se notează: $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid n \vdots d\}$.

Mulțimea multiplilor naturali ai numărului natural n este mulțimea tuturor numerelor naturale care se divid cu n. Se notează: $M_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \vdots n\}$.

Exemple: $D_{14} = \{1,2,7,14\}$; $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$; $D_3 = \{1,3\}$;

$M_3 = \{0,3,6,9,...\}$; $M_{12} = \{0,12,24,36,...\}$;.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, atunci D_n este o mulțime finită, iar M_n este o mulțime infinită. Pentru $n = 0$ avem $D_0 = \mathbb{N}$ și $M_0 = \{0\}$.

Numere prime. Un număr natural care are exact doi divizori se numește număr *prim*.

Cu alte cuvinte, un număr natural $p \geq 2$ este prim dacă și numai dacă singurii săi divizori sunt 1 și p.

Numerele prime până la 100 sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. *Singurul număr prim par este* 2.

Numere compuse. Un număr natural, mai mare decât 1, care are cel puțin trei divizori, se numește *număr compus*. Altfel spus, un număr natural este compus dacă are cel puțin un divizor propriu.

Exemple: Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ... sunt numere compuse.

Observații:

1. Numerele naturale 0 și 1 nu sunt nici prime și nici compuse.

3. Pentru a verifica dacă un număr natural este prim, procedăm astfel:

a. împărțim pe rând numărul dat la numerele prime luate în ordine crescătoare (sau verificăm dacă e divizibil cu ele folosind criteriile de divizibilitate) până când câtul împărțirii devine mai mic decât împărțitorul;

b. dacă nici una dintre împărțiri nu s-a efectuat exact, atunci numărul este prim;

c. dacă la una dintre împărțiri restul este zero, atunci numărul este compus iar împărțitorul și câtul sunt divizori ai săi.

Exemple: **1.** Numărul 37 este prim: $37 \not\vdots 2$; $37 \not\vdots 3$; $37 \not\vdots 5$; $37 \not\vdots 7$.

2. Numărul 121 este compus, pentru că admite pe 11 ca divizor propriu:

$121 \not\vdots 2$; $121 \not\vdots 3$; $121 \not\vdots 5$; $121 \not\vdots 7$; $121 = 11 \cdot 11$

Criterii de divizibilitate

Un criteriu de divizibilitate este o regulă prin care se poate decide dacă numărul natural a este divizibil sau nu cu numărul natural nenul b, fără a efectua împărțirea lui a la b.

Criteriul de divizibilitate cu 10. Un număr natural este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima sa cifră este 0.

Criteriul de divizibilitate cu 10^k. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Un număr natural de cel puțin $k+1$ cifre este divizibil cu 10^k dacă și numai dacă ultimele sale k cifre sunt egale cu 0.

Cu alte cuvinte, un număr natural este divizibil cu 100 (1000, 10000 etc.), dacă și numai dacă ultimele sale două (trei, patru etc.) cifre sunt egale cu 0.

Observație. Restul împărțirii unui număr natural n la 10 este egal cu ultima cifră a lui n. Analog, numărul format de ultimele două (trei, patru etc.) cifre ale lui n reprezintă restul împărțirii lui n la 100 (1000, 10000 etc.).

Criteriul de divizibilitate cu 2, respectiv cu 5. Un număr natural este divizibil cu 2, respectiv cu 5, dacă și numai dacă ultima sa cifră este divizibilă cu 2, respectiv cu 5.

Criteriul de divizibilitate cu 4, respectiv cu 25. Un număr natural este divizibil cu 4, respectiv cu 25, dacă și numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 4, respectiv cu 25.

Notând cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n, iar cu $\overline{zu}(n)$ numărul format de ultimele două cifre ale lui n, rezultă că:

1. $n \vdots 2 \Leftrightarrow u(n) \in \{0,2,4,6,8\}$

2. $n \vdots 5 \Leftrightarrow u(n) \in \{0,5\}$

3. $n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00,04,08,12,16,...,96\}$

4. $n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00,25,50,75\}$

Criteriul de divizibilitate cu 3, respectiv cu 9. Un număr natural este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

1. $\overline{a_1 a_2 ... a_n} \vdots 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \vdots 3$ **2.** $\overline{a_1 a_2 ... a_n} \vdots 9 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \vdots 9$

Observaţii privind restul împărţirii unui număr natural la 2, 3, 4, 5, 9, 25

1. Restul împărţirii unui număr natural n la 2, respectiv la 5 este egal cu restul împărţirii la 2, respectiv la 5, a ultimei cifre a lui n.
2. Restul împărţirii unui număr natural n la 4, respectiv la 25, este egal cu restul împărţirii la 4, respectiv la 25, a numărului format de ultimele două cifre ale lui n.
3. Restul împărţirii unui număr natural n la 3, respectiv la 9, este egal cu restul împărţirii la 3, respectiv la 9, a sumei cifrelor numărului n.

Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate în $\mathbb{N}$

1. Pentru orice număr natural a au loc relaţiile $a \vdots 1$ şi $0 \vdots a$.
2. **Reflexivitatea.** Orice număr natural a se divide cu el însuşi: $a \vdots a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.
3. **Antisimetria.** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ au proprietatea că $a \vdots b$ şi $b \vdots a$, atunci $a = b$.
4. **Tranzitivitatea.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ au proprietatea că $a \vdots b$ şi $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$.
5. **Divizibilitatea produsului**
   a. Produsul a două numere naturale este divizibil cu fiecare factor al produsului.
   $a \cdot b \vdots a$ şi $a \cdot b \vdots b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$.
   b. Dacă numărul natural a este divizibil cu numărul natural b, atunci orice multiplu al lui a este divizibil cu b.
   dacă $a \vdots b$, atunci $a \cdot c \vdots b$, oricare ar fi $c \in \mathbb{N}$.
   c. Dacă a, b, m, n sunt numere naturale astfel încât a este divizibil cu m şi b este divizibil cu n, atunci produsul ab este divizibil cu produsul mn.
   dacă $a \vdots m$ şi $b \vdots n$, atunci $a \cdot b \vdots m \cdot n$.
6. **Divizibilitatea sumei/diferenţei**
   a. Dacă numerele naturale a şi b, cu $a \geq b$, sunt divizibile cu numărul natural d, atunci suma şi diferenţa lor sunt divizibile cu d
   dacă $a \vdots d$ şi $b \vdots d$, atunci $a + b \vdots d$ şi $a - b \vdots d$
   b. Dacă fiecare dintre termenii unei expresii care conţine sume şi/sau diferenţe este divizibil cu numărul natural d, atunci expresia este divizibilă cu d.
   c. Dacă fiecare termen al unei expresii care conţine sume şi/sau diferenţe, cu excepţia unuia singur, este divizibil cu d, atunci expresia nu este divizibilă cu d.

Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi

Teorema fundamentală a aritmeticii. Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de puteri de numere prime.

Făcând abstracţie de ordinea factorilor, descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime este unică.

Exemple: $8 = 2^3$; $10 = 2 \cdot 5$; $28 = 2^2 \cdot 7$; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $999 = 3^3 \cdot 37$.

Numărul divizorilor naturali ai unui număr natural compus este egal cu produsul succesorilor exponenţilor puterilor ce apar în descompunerea în produs de puteri de numere prime. Altfel spus, numărul divizorilor naturali ai numărului $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ este $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$.

Exemple: 1. $27 = 3^3 \Rightarrow \text{card}\, D_{27} = 3 + 1 = 4$, adică 27 are 4 divizori.

2. $28 = 2^2 \cdot 7^1$, deci numărul divizorilor lui 28 este $(2+1) \cdot (1+1) = 6$.
Într-adevăr, $D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$, deci $\text{card}\, D_{28} = 6$.

Observaţie. Pentru a determina divizorii unui număr natural putem proceda astfel: un număr ce admite o descompunere în produs de puteri de numere prime de forma $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ va avea ca divizori toate numerele ale căror descompuneri în produs de puteri de numere prime au forma $a^x \cdot b^y \cdot c^z$, cu $0 \leq x \leq m$, $0 \leq y \leq n$, $0 \leq x \leq p$.

Exemplu: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Divizorii lui 36 sunt: 1, 2, 3, 2^2, 3^2, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 3^2$.

Cel mai mare divizor comun

Date fiind două sau mai multe numere naturale, nu toate nule, mulţimea divizorilor comuni este nevidă, deoarece conţine cel puţin un element, şi anume pe 1.

Definiţie. Numărul natural d este *cel mai mare divizor comun* al numerelor naturale a şi b, nu ambele nule, dacă satisface simultan condiţiile:

a) d divide pe a şi d divide pe b;

b) d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a şi b.

Cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b se notează c.m.m.d.c.(a,b) sau (a,b).

$$(a,b) = d \text{ dacă şi numai dacă } \begin{cases} d \mid a \text{ şi } d \mid b \\ \text{dacă } i \mid a \text{ şi } i \mid b, \text{atunci } i \mid d \end{cases}$$

Observaţii.

1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 0 şi $a \in \mathbb{N}^*$ este a.
2. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \mid b$, atunci $(a,b) = a$.
3. În mod asemănător se poate defini şi noţiunea de cel mai mare divizor comun a trei sau mai multe numere naturale, nu toate nule.
4. Mulţimea divizorilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulţimea divizorilor celui mai mare divizor comun al acestora.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.
2. Cel mai mare divizor comun este produsul *factorilor primi comuni*, luaţi *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mic* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{matrix} 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{c.m.m.d.c.}(336,360) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Numere prime între ele. Două numere naturale a şi b se numesc *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1.

Două numere prime între ele se mai numesc şi *relativ prime* sau *coprime*.

Observaţii. 1. Două numere prime diferite sunt prime intre ele.

2. Două numere prime între ele nu sunt neapărat numere prime.

Exemplu. $\left.\begin{matrix} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{matrix}\right| \Rightarrow (24,35) = 1 \Rightarrow$ 24 şi 35 sunt *prime între ele*.

Aplicaţii privind cel mai mare divizor comun

1. Fie a şi b două numere naturale nenule şi d cel mai mare divizor comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x şi y, astfel încât $a = dx$ şi $b = dy$.
2. Dacă un număr natural d se divide cu două numere naturale a şi b, ce sunt prime între ele, atunci d se divide şi cu produsul lor.
3. Dacă mai multe numere naturale a, b, c se divid cu acelaşi număr natural, nenul i, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c se divide cu i.

4. Teorema lui Gauss. Dacă produsul numerelor naturale a şi b se divide cu numărul natural i, iar a şi i sunt numere prime între ele, atunci b se divide cu i.

Cel mai mic multiplu comun

Mulţimea multiplilor unui număr natural, nenul este infinită. Mulţimea multiplilor comuni a două numere naturale, nenule, este şi ea infinită, deoarece conţine cel puţin produsul numerelor şi toţi multiplii acestuia.

Definiţie. Numărul natural m este *cel mai mic multiplu comun* al numerelor naturale a şi b dacă satisface simultan condiţiile:

a) m este divizibil cu a şi b;

b) orice alt multiplu al numerelor a şi b este divizibil cu m.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b se notează c.m.m.m.c.$[a,b]$ sau $[a,b]$.

$$[a,b]=m \text{ dacă şi numai dacă } \begin{cases} a|m \text{ şi } b|m \\ \text{dacă } a|M \text{ şi } b|M, \text{atunci } m|M \end{cases}$$

Observaţii

1. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 0 şi $a \in \mathbb{N}$ este 0: $[0,a]=0$.
2. Dacă $a,b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a|b$, atunci $[a,b]=b$.
3. În mod asemănător se poate defini şi noţiunea de cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multe numere naturale.
4. Mulţimea multiplilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulţimea multiplilor celui mai mic multiplu comun al acestora.

Comentariu. Fiind date două numere naturale nenule a şi b, se observă că, deşi 0 este un multiplu comun al numerelor a şi b, el nu este şi *cel mai mic multiplu comun* al lor, deoarece nu este îndeplinită a doua condiţie din definiţia c.m.m.m.c.

Într-adevăr, presupunând că $[a,b]=0$, cum produsul ab este multiplu comun al lui a şi b, ar rezulta $ab \vdots 0$, fals.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.
2. Cel mai mic multiplu comun este produsul *factorilor primi comuni şi necomuni*, luaţi *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mare* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{matrix} 336=2^4\cdot 3\cdot 7 \\ 360=2^3\cdot 3^2\cdot 5 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ c.m.m.m.c.$[336,360]=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=5040$.

Aplicaţii privind cel mai mic multiplu comun

1. Fie a şi b două numere naturale nenule şi m cel mai mic multiplu comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x şi y, astfel încât $m=ax$ şi $m=by$.
2. Dacă un număr natural n se divide cu două numere naturale a şi b, atunci n se divide şi cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.
3. **Legătura dintre c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c.** Produsul dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b este egal cu $a\cdot b$.

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b, \text{ pentru orice } a,b\in\mathbb{N}.$$

Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Fie $a,b\in\mathbb{Z}$ $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Ca şi în cazul numerelor naturale, spunem că a divide pe b, şi scriem $a|b$, dacă există numărul $c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $b=a\cdot c$. Numărul a se numeşte divizor al lui b, iar b se numeşte multiplu de a.

Observaţii:

1. Dacă $a|b$, atunci $-a|b$, $a|-b$ şi, mai general, $\pm a \mid \pm b$.
   Exemplu: $2|20$ deoarece există $10\in\mathbb{Z}$ astfel încât $20=2\cdot 10$, dar şi $-2|20$, deoarece există numărul întreg -10 astfel încât $20=(-2)\cdot(-10)$.
2. Spre deosebire de mulţimea $\mathbb{N}$, în care relaţia de divizibilitate este antisimetrică, adică „din $a|b$ şi $b|a$, atunci $a=b$“, în $\mathbb{Z}$ relaţia de divizibilitate nu este antisimetrică.
   Mai precis, avem $a|b$ şi $b|a$ dacă şi numai dacă $|a|=|b|$, sau, altfel spus, $a=\pm b$.
   Exemplu: $5|(-5)$ şi $(-5)|5 \Rightarrow 5=-(-5)$.
3. Dacă în $\mathbb{N}$ un număr nenul a are n divizori, atunci în $\mathbb{Z}$ numărul a are $2n$ divizori.
   Exemplu: În $\mathbb{N}$, $D_8=\{1,2,4,8\}$, iar în $\mathbb{Z}$ avem $D_8=\{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$.
4. Dacă în $\mathbb{N}$ mulţimea multiplilor numărului a este $M_a=\{0,a,2a,3a,...\}$, atunci în $\mathbb{Z}$ avem $M_a=\{0,\pm a,\pm 2a,\pm 3a,...\}$.
   Exemplu: În $\mathbb{N}$ avem $M_7=\{0,7,14,21,...\}$, iar în $\mathbb{Z}$ avem $M_7=\{0,\pm 7,\pm 14,\pm 21,...\}$.
5. Un număr întreg p este prim, dacă numărul natural $|p|$ este prim.
   Exemplu: Numerele prime în $\mathbb{Z}$: $5,-3,7,-11$.
6. Numerele întregi -1, 0, 1 nu sunt nici prime şi nici neprime (compuse).
7. Proprietăţile divizibilităţii în $\mathbb{N}$ rămân valabile şi în $\mathbb{Z}$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Divizorii naturali ai numărului 12 sunt ....
2. Multiplii lui 7 mai mici decât 30 sunt ....
3. Dintre numerele 121; 143 şi 243, divizibil cu 3 este numărul ....
4. Cel mai mare divizor comun al numerelor 120 şi 150 este egal cu ....
5. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 şi 25 este egal cu ....
6. Numărul numerelor de forma $\overline{xy}$ divizibile cu 10 este egal cu ....
7. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{24x}$ divizibil cu 2 este ....
8. Dacă numărul $\overline{xy}$ este divizibil cu 9 şi $x-y=1$, atunci numărul $\overline{xy}$ este egal cu ....
9. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{26x}$ divizibil cu 3 este egal cu ....
10. Dacă $A=D_{30}$ şi $B=M_2$, atunci $A\cap B=$....
11. Cel mai mic număr natural de forma $\overline{abab}$, $a\neq b$, cu cel mai mic număr de divizori este egal cu ....
12. Numărul divizorilor naturali ai numărului 320 este egal cu ....

13. Un număr natural împărțit la 60 dă restul 45. Restul împărțirii aceluiași număr natural la 15 este egal cu ....

14. Dacă $\left(\overline{1ab}+\overline{ab}\right)\vdots 31$, atunci valoarea expresiei $a+b$ este egală cu .... sau cu ....

15. Descompunerea în produs de puteri de numere prime a numărului 420 este ....

16. Suma a două numere prime este 39. Produsul celor două numere este egal cu ....

17. Dintre numerele 12^{36} și 36^{12} mai mulți divizori are numărul ....

18. Valoarea de adevăr a propoziției "15 și 38 sunt prime între ele" este ....

19. Cel mai mare multiplu comun al numerelor 30 și 20, mai mic decât 150 este ....

20. Dacă $a+3b=9$ și a este număr prim, atunci valoarea numărului natural b este egală cu ....

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. ***a)*** Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{18}{x+3}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

b) Determinați mulțimea $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{9}{x+3}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$.

c) Determinați mulțimea $C=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{3x+2}{2x+3}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

22. ***a)*** Știind că $(a;b)=9$ și $[a;b]=72$, determinați toate perechile de numere a și b.

b) Știind că $(a;b)=12$ și $5a+2b=384$, determinați toate perechile de numere a și b.

c) Știind că $[a;b]=240$ și $a\cdot b=2880$, determinați toate perechile de numere a și b.

23. ***a)*** Arătați că $2\cdot 3^n+3^{n+1}+2\cdot 3^{n+2}$ este divizibil cu 23, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

b) Arătați că $5^n+3\cdot 5^{n+2}-2\cdot 5^{n+1}$ este divizibil cu 11, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

c) Să se arate că numărul $A=7\cdot 12^n\cdot 3^{n+1}+6\cdot 4^{n+1}\cdot 9^{n+2}+18^{n+1}\cdot 2^{n+1}$ este divizibil cu 2001, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

24. Să se determine cel mai mare număr natural de trei cifre, știind că dacă se împarte pe rând la 3, 8, 11 se obțin resturile 2, 7 și respectiv 10.

25. Împărțind numărul natural n la 9, la 18 și la 27 se obțin câturi diferite de zero și de fiecare dată restul egal cu 3. Determinați cel mai mic număr natural n.

26. Numerele 348, 790 și 1180 împărțite la același număr natural dau resturile 12, 6 și respectiv 4. Aflați cel mai mic împărțitor.

27. ***a)*** Demonstrați că $2+2^2+2^3+...+2^{2006}$ este divizibil cu 3.

b) Demonstrați că $6+6^2+6^3+...+6^{21}$ este divizibil cu 43.

28. ***a)*** Determinați numerele de forma $\overline{a51b}$ divizibile cu 12.

b) Determinați numerele de forma $\overline{a5a}$ divizibile cu 9.

c) Determinați numerele de forma $\overline{a21b}$ divizibile cu 15.

29. ***a)*** Arătați că numărul natural $9^{1996}-7^{1992}$ este divizibil cu 10.

b) Arătați că $2005^{2005}+2006^{2006}-1$ este divizibil cu 10.

c) Arătați că $7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$ este divizibil cu 10.

d) Demonstrați că numărul $5^{n+3}\cdot 2^n-125$ este divizibil cu 5 și cu 9.

30. Arătați că:

a) dacă $(2x+3y)\vdots 5$, atunci $(12x+18y)\vdots 5$.

b) dacă $(2x+y)\vdots 3$, atunci $(5x+7y)\vdots 3$.

31. Să se arate că dacă $a\mid a\cdot b+c$ și $a\mid a\cdot c+b$, atunci $a\mid\overline{bc}+\overline{cb}$.

32. Demonstrați că numerele de forma $\overline{abcabc}$ sunt divizibile cu 13.

33. Dacă $A=2a+b+5c$ și $B=15a+46b+20c$, $a,b,c\in\mathbb{N}$, să se demonstreze că $A\vdots 7\Leftrightarrow B\vdots 7$.

34. Arătați că numerele $A=2^n\cdot 5^{n+1}+7$ și $B=2^{n+1}\cdot 5^n+3$ sunt prime între ele, $n\in\mathbb{N}$.

35. Determinați numerele naturale a și b, prime între ele, știind că $3a+4b=39$.

36. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că:

$$10\cdot\left(\frac{\overline{ab}}{c}-1\right)+\frac{\overline{bc}}{a}=82.$$

37. Aflați numerele de forma $\overline{abc}$, mai mici decât 500, dacă:

a) $\overline{abc}$ dă restul 5 la împărțirea cu 9;

b) $(a+b+c)$ și $(\overline{acb}+2)$ sunt divizibile cu 7.

38. Demonstrați că numărul $A=(n+3)(n+6)$ este divizibil cu 2, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

39. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 5 și $a+d=7\cdot(b+c)$.

40. Arătați că oricum am alege 6 numere naturale, există printre ele două care au diferența divizibilă cu 5.

41. Arătați că oricare ar fi numerele naturale m și n pentru care $2m-3n=4$ numărul $A=(m-2)(n+2)$ este divizibil cu 6.

42. ***a)*** Determinați mulțimea resturilor obținute prin împărțirea la 10 a elementelor mulțimii $M=\left\{n^2\left|n\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

b) Se consideră numerele naturale x și y astfel încât numărul $A=x^2\cdot 3^{48}+y^2\cdot 2^{25}$ să fie divizibil cu 5. Arătați că x și y sunt divizibile cu 5.

43. Fie mulțimile: $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\right.7<x\le a,\text{ unde } a \text{ este număr natural}\right\}$

și $B=\left\{y\in\mathbb{N}\left|y\right.\text{ este divizibil cu }5\right\}$.

Determinați toate numerele naturale a știind că mulțimea $A\cap B$ are 20 elemente.

44. Se consideră mulțimile: $M_1=\{1\}$, $M_2=\{1;3\}$, $M_3=\{1;3;6\}$, $M_4=\{1;3;6;10\}$, $M_5=\{1;3;6;10;15\}$, ...

a) Arătați că există $k, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $55 \in M_k - M_p$.

b) Există $t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2012 \in M_t$?

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 5 din M_{2012}.

45. *a)* Să se arate că fracția $\frac{3n+7}{2n+5}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

b) Să se arate că fracția $\frac{n^2-n+2a}{3n^2+9n+2b}$ este reductibilă oricare ar fi $n, a, b \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că fracția $\frac{2\cdot 3^n+5}{3^{n+1}+6}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

d) Să se arate că fracția $\frac{2^{n+3}+2^{n+1}+2^n}{3^{n+5}+2\cdot 3^{n+3}}$ este reductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că fracția $\frac{20\cdot n+5}{15\cdot n+4}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

46. Un grup de sportivi este aliniat în coloane câte 10, 14 sau 15 sportivi și de fiecare dată rămân 6 sportivi nealiniați. Care este cel mai mic număr de sportivi pe care-l poate avea acest grup?

47. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $13n+8$ dă restul 13 la împărțirea cu 80, iar $8n+5$ dă restul 5 la împărțirea cu 50. Determinați ultimele două cifre ale lui n.

48. Cătălin și Dana participă la o competiție de biciclete pe o pistă circulară închisă. Cătălin face un tur complet în 8 minute, iar Dana în 6 minute. Ei pleacă simultan, în aceeași direcție. După câte minute Cătălin și Dana vor trece simultan prin același loc?

49. Suporterii unui club, care sunt mai mulți decât 100, dar mai puțini decât 150, se pot așeza în rânduri câte 2, câte 3, câte 4, câte 5 formând de fiecare dată un număr întreg de rânduri. Determinați numărul suporterilor din club.

50. Trei autobuze pornesc din aceeași stație, la aceeași oră, în direcții diferite. Primul autobuz efectuează cursa dus-întors în 42 minute, al doilea în 63 minute, iar al treilea în 84 minute. După cât timp vor pleca din nou, din aceeași stație, la aceeași oră?

Tema 1.4

Numere raționale. Fracții ordinare. Fracții zecimale

Fracții ordinare. O *fracție ordinară* este o pereche ordonată de numere naturale (a, b), cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$, care simbolizează câtul neefectuat dintre numerele a și b.

Numărul natural a se numește *numărătorul* fracției, iar b este *numitorul* fracției.

Fracții echivalente. Fracțiile echivalente măsoară aceeași cantitate din întreg (*echivalent* înseamnă *valoare egală*).



Din figura alăturată, se vede că *o doime* reprezintă aceeași parte dintr-un întreg ca și *două pătrimi*.



Definiție. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ *sunt echivalente* și scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ *nu sunt echivalente* și scriem $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$.

Exemple. **1.** $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, deoarece $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$; **2.** $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{7}$, deoarece $3 \cdot 7 \neq 5 \cdot 4$.

Amplificarea. A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a înmulți cu acel număr atât numărătorul, cât și numitorul fracției. Se scrie:

$$\frac{a}{b} \overset{n)}{=} \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemple. **1.** $\frac{2}{3} \overset{5)}{=} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$; **2.** $\frac{7}{13} \overset{2)}{=} \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 13} = \frac{14}{26}$; **3.** $\frac{1}{4} \overset{6)}{=} \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{6}{24}$.

Simplificarea. Fie a și b două numere naturale ($b \neq 0$) și $d \neq 1$ un divizor comun al lor. A *simplifica* fracția $\frac{a}{b}$ cu numărul d înseamnă a împărți la d atât numărătorul, cât și numitorul fracției. Se scrie:

$$\frac{a}{b} \overset{(d}{=} \frac{a:d}{b:d}.$$

Exemple. **1.** $\frac{10}{22} \overset{(2}{=} \frac{10:2}{22:2}$, adică $\frac{10}{22} \overset{(2}{=} \frac{5}{11}$; **2.** $\frac{36}{72} \overset{(4}{=} \frac{36:4}{72:4} = \frac{9}{18}$.

Fracții ireductibile. O fracție se numește *ireductibilă* dacă ea nu se poate simplifica prin nici un număr natural diferit de 1. Fracțiile care se pot simplifica (prin numere naturale cel puțin egale cu 2) se numesc *reductibile*.

Exemple. $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{20}{33}, \frac{100}{51}, \frac{400}{1349}$ sunt fracții ireductibile.

Observații. **1.** Prin amplificarea sau simplificarea unei fracții se obține o fracție echivalentă cu cea inițială.

2. O fracție este ireductibilă dacă și numai dacă numărătorul și numitorul fracției sunt numere *prime între ele*.

3. O fracție oarecare devine ireductibilă prin simplificarea cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

Exemplu. Fracția $\frac{840}{1120}$ devine ireductibilă prin simplificarea cu cel mai mare divizor comun al numerelor 840 și 1120, adică cu 280: $\frac{840}{1120}^{(240} = \frac{3}{4}$, care este fracție ireductibilă.

Observație. Folosind criteriile de divizibilitate, o fracție poate fi simplificată succesiv, până când se obține o fracție ireductibilă: $\frac{840}{1120}^{(10} = \frac{84}{112}^{(4} = \frac{21}{28}^{(7} = \frac{3}{4}$.

Aducerea fracțiilor la același numitor. Pentru a aduce două sau mai multe fracții la cel mai mic numitor comun, se parcurg următorii pași:

a. Se determină cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor date; acesta va fi numitorul comun.

b. Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun găsit și numitorul fracției respective.

Exemplu. Pentru a aduce fracțiile $\frac{5}{12}, \frac{4}{9}$ și $\frac{8}{15}$ la același numitor, procedăm astfel.

a. Cum $12 = 2^2 \cdot 3$, $9 = 3^2$ și $15 = 3 \cdot 5$, numitorul comun este $[12,9,15] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

b. Amplificăm fracția $\frac{5}{12}$ cu câtul dintre 180 și 12, adică cu 15 și obținem $^{15)}\frac{5}{12} = \frac{75}{180}$.

Amplificăm fracția $\frac{4}{9}$ cu câtul dintre 180 și 9, adică cu 20 și obținem $^{20)}\frac{4}{9} = \frac{80}{180}$.

Amplificăm fracția $\frac{8}{15}$ cu câtul dintre 180 și 15, adică cu 12 și obținem $^{12)}\frac{8}{15} = \frac{96}{180}$.

Observații.

1. În unele situații, este de preferat ca, înainte de a calcula cel mai mic multiplu comun al numitorilor, să se simplifice fiecare fracție până devine ireductibilă.
2. Dacă numitorii fracțiilor sunt numere prime între ele două câte două, atunci cel mai mic numitor comun este produsul numitorilor fracțiilor.
3. Dacă unul dintre numitorii fracțiilor este multiplu ai celorlalți numitori, atunci acesta este numitorul comun.

Număr rațional. Am văzut că aceeași cantitate dintr-un întreg poate fi reprezentată sub forma unei fracții ordinare în mai multe moduri, prin fracții echivalente. Astfel, o doime, două pătrimi, cinci zecimi etc., sunt reprezentări diferite ale aceleiași cantități, deci fracțiile echivalente $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}$ sunt forme diferite de scriere ale aceluiași număr, și anume a acelui număr care semnifică o jumătate dintr-un întreg.

Un *număr rațional* este mulțimea tuturor fracțiilor $\frac{m}{n}$ echivalente cu o fracție dată $\frac{a}{b}$.

Oricare din elementele mulțimii se va numi *reprezentantul* numărului rațional, respectiv. Un număr rațional îl putem nota utilizând oricare dintre reprezentanții săi.

Exemplu: Numărul rațional R care semnifică trei cincimi dintr-un întreg poate fi notat prin oricare dintre fracțiile $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \ldots, \frac{3k}{5k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, care sunt reprezentanți ai lui R.

Definiție. Două numere raționale sunt egale dacă orice reprezentanți ai celor două numere raționale sunt fracții echivalente.

Cu alte cuvinte, dacă pentru numerele raționale A, respectiv B, considerăm doi reprezentanți oarecare $\frac{m}{n}$ și respectiv $\frac{p}{q}$, atunci $A = B$ dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Exemplu: Numerele raționale $\frac{6}{10}$ și $\frac{9}{15}$ sunt egale, deoarece fracțiile $\frac{6}{10}$ și $\frac{9}{15}$ sunt echivalente: $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$, întrucât $6 \cdot 16 = 9 \cdot 10$.

Observație. Numărul rațional $\frac{6}{10}$ este mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu $\frac{6}{10}$, care este mulțimea $A = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \ldots\right\}$. La fel, numărul rațional $\frac{9}{15}$ este mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu $\frac{9}{15}$, adică mulțimea $B = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \ldots\right\}$. Deoarece $A = B$, este justificat să spunem că numerele raționale $\frac{6}{10}$ și $\frac{9}{15}$ sunt egale.

Orice număr natural este număr rațional deoarece, dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci numărul rațional care are un reprezentant de forma $\frac{n}{1}$ poate fi identificat cu numărul natural n, pentru că semnifică aceeași cantitate (și anume n întregi).

Observație. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este număr natural dacă și numai dacă $a \vdots b$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este mulțimea tuturor numerelor raționale care au ca reprezentanți fracții cu numitorul și numărătorul numere naturale nenule. Ea se notează cu simbolul $\mathbb{Q}_+^*$: $\mathbb{Q}_+^* = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}^* \text{ și } b \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Mulțimea $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\}$ formează mulțimea numerelor raționale, nenegative.

Deoarece orice număr natural este și număr rațional, avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$.

Scoaterea întregilor dintr-o fracție. Dacă un număr rațional este reprezentat de o fracție $\frac{a}{b}$, iar c și r sunt câtul și restul împărțirii lui a la b, atunci putem scrie $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} = c\frac{r}{b}$, care se citește „$c$ întregi și $\frac{r}{b}$". Numărul natural c se numește *partea întreagă*, iar numărul rațional $\frac{r}{b}$ se numește *partea fracționară* a numărului rațional $\frac{a}{b}$.

Exemple. **1.** $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, deoarece $20 = 3 \cdot 6 + 2$; **2.** $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$, deoarece $48 = 5 \cdot 9 + 3$.

Introducerea întregilor într-o fracție. Numărul rațional scris sub forma $a\frac{b}{c}$ se poate scrie sub forma unei fracții ordinare astfel: $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$.

Forme de scriere a unui număr rațional. Prin împărțirea a două numere naturale se obține o fracție zecimală, cu număr finit de zecimale nenule sau periodică. Astfel, orice număr rațional poate fi exprimat atât printr-o fracție ordinară, cât și printr-o fracție zecimală.

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale. O fracție ordinară se transformă într-o fracție zecimală prin împărțirea numărătorului la numitor. Pentru a evita

calculele mari, în majoritatea cazurilor este recomandat ca, înainte de împărțire, să se simplifice fracția astfel încât ea să devină ireductibilă.

Regula 1. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor nu are alți divizori primi, în afara lui 2 și/sau a lui 5, se transformă într-o *fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule*. Numărul zecimalelor este egal cu maximul dintre exponenții lui 2 și 5 din descompunerea numitorului.

Exemple. **1.** $\frac{3}{16}=0,1875$, iar $16=2^4$; **2.** $\frac{3}{40}=0,075$, iar $40=2^3\cdot 5$.

Observație. Deoarece descompunerea în factori primi a numitorului este de forma $2^m\cdot 5^n$, amplificând convenabil, putem obține fracții cu numitorul egal cu o putere a lui 10.

Exemple. **1.** $^{2)}\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0,6$; **2.** $^{5)}\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=0,35$; **3.** $^{25)}\frac{11}{40}=\frac{275}{1000}=0,275$.

Regula 2. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor nu se divide nici cu 2, nici cu 5, se transformă în *fracție zecimală periodică simplă*.

Exemple. **1.** $\frac{1}{3}=0,(3)$; **2.** $\frac{40}{7}=5,(714285)$; **3.** $\frac{47}{27}=1,(270)$.

Regula 3. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor este divizibil cu cel puțin unul dintre numerele 2 și 5 și are cel puțin un alt divizor prim decât 2 sau 5, se transformă într-o *fracție zecimală periodică mixtă*. Cifrele de după virgulă, care nu se repetă, constituie partea zecimală neperiodică, iar grupul de cifre care se repetă formează partea periodică.

Exemple. **1.** $\frac{35}{6}=5,8333...=5,8(3)$; **2.** $\frac{53}{22}=2,4090909...=2,4(09)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

O fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător partea zecimală, iar la numitor numărul format din cifra 1 urmată de atâtea cifre de 0 câte are partea zecimală:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n}=a\frac{\overline{b_1b_2...b_n}}{10^n}$$

Exemple. **1.** $2,5=\frac{25}{10}$; **2.** $34,87=\frac{3487}{100}$; **3.** $5,216=\frac{5216}{1000}$.

O fracție zecimală periodică simplă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada:

$$\overline{a,(b_1b_2...b_n)}=a\frac{\overline{b_1b_2...b_n}}{\underbrace{99...9}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. **1.** $4,(7)=4\frac{7}{9}$; **2.** $0,(29)=\frac{29}{99}$; **3.** $1,(0258)=1\frac{258}{9999}$;

O fracție zecimală periodică mixtă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală neperiodică, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are partea periodică, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea zecimală neperiodică.

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)}=a\frac{\overline{b_1b_2...b_nc_1c_2...c_m}-\overline{b_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{m\text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. **1.** $8,2(7)=8\frac{27-2}{90}=8\frac{25}{90}=8\frac{5}{18}=\frac{8\cdot 18+5}{18}=\frac{149}{18}$.

2. $0,23(731)=\frac{23731-23}{99900}=\frac{23708}{99900}=\frac{11854}{49950}=\frac{5927}{24975}$.

Partea întreagă a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală este egală cu numărul de întregi, deci cu numărul natural scris „înainte de virgulă".

Partea fracționară (sau zecimală) a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală se obține din numărul dat înlocuind numărul de întregi cu 0.

Ținând cont de operațiile cu fracții zecimale învățate în clasa a V-a, partea fracționară a unui număr este egală cu diferența dintre numărul dat și partea sa întreagă.

Exemple: **1.** Partea întreagă a numărului 3,14 este 3, iar partea sa fracționară este 0,14.
2. Partea întreagă a numărului 2,(41) este 2, iar partea sa fracționară este 0,(41).
3. Partea întreagă a numărului 5,2(71) este 5, iar partea fracționară este 0,2(71).

Media aritmetică ponderată a unor numere raționale

Definiție. Numim ***media aritmetică*** a două sau mai multe numere raționale pozitive numărul obținut prin împărțirea sumei acestor numere la numărul lor.

$$m_a(x;y)=\frac{x+y}{2};\qquad m_a(x_1;x_2;x_3;...;x_n)=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}.$$

Exemplu: $m_a(9,4;20,6;4,2;11,8)=\frac{9,4+20,6+6,2+11,8}{4}=\frac{48}{4}=12.$

Definiție. Media aritmetică ponderată a numerelor raționale pozitive $x_1,x_2,x_3,...,x_n$, care au respectiv, ponderile $p_1,p_2,p_3,...,p_n$ este numărul

$$m_{a.p.}=\frac{x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+...+x_n\cdot p_n}{p_1+p_2+p_3+...+p_n}.$$

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numere raționale 12,5; 7,25 și 0,75, care au ponderile 4; 6 și respectiv 20 este numărul $m_{a.p.}=\frac{12,5\cdot 4+7,25\cdot 6+0,75\cdot 20}{4+6+20}=\frac{108,5}{20}=5,425.$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $\frac{5}{12}+\frac{7}{10}$ este egal cu ... .

2. Rezultatul calculului $1,3+2,(5)$ este egal cu ... .

3. Rezultatul calculului $2:\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{5}:\frac{11}{10}$ este egal cu ... .

4. Două numere raționale aflate între –3,4 și –3,5 sunt ... .

5. Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$ este egal cu ... .

6. Numărul natural n pentru care $\frac{5}{n-3}$ este o fracție echiunitară este ... .

7. Suma tuturor valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care fracția $\frac{n+1}{6}$ este subunitară, este egală cu ... .

8. Dacă $\frac{n+2}{3n-4}$ este o fracție supraunitară și $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \in \{...\}$.

9. Fracția ireductibilă echivalentă cu $\frac{175}{245}$ este egală cu ... .

10. Valoarea naturală a numărului n pentru care fracția $\frac{7}{8}$ este echivalentă cu fracția $\frac{n}{32}$ este egală cu ... .

11. Dintre numerele $\frac{7}{3}$ și $\frac{9}{5}$, mai mare este numărul ... .

12. Dacă mulțimea $A=\left\{\frac{4}{3};2,5;\frac{12}{3};5;7;\frac{11}{2}\right\}$, atunci $A\cap\mathbb{N}=...$ și $A\cap\mathbb{Q}=....$

13. Ordinea descrescătoare a numerelor a = 1,234; b = 1,(234); c = 1,2(34) și d = 1,23(4) este ... .

14. Scrierea sub formă de fracție zecimală a sumei numerelor $\frac{38}{10};\frac{7}{3};\frac{13}{2}$ și $\frac{29}{5}$ este ... .

15. Scrierea sub formă de fracție ordinară a sumei numerelor 1,(5); 3,3; 2,5(4) și 1,23 este ... .

16. Soluția ecuației $x+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ este egală cu ... .

17. Soluția ecuației $0,8x-5=14$ este egală cu ... .

18. Valoarea absolută a numărului $-35,438$ este egală cu ... .

19. Un număr este egal cu $\frac{5}{8}$ din alt număr, iar suma lor este 130. Produsul celor două numere este egal cu ... .

20. Înmulțind un număr cu $\frac{2}{3}$, apoi rezultatul înmulțirii cu $\frac{14}{13}$, obținem $\frac{11}{15}$. Numărul inițial este egal cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie mulțimile $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{1}{7}<\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\right\}$ și $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{3}{2}>\frac{5}{n}>\frac{2}{3}\right\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor A și B.
b) Determinați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ și $B\setminus A$.

22. Fie mulțimea $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2\right\}$.

a) Calculați $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

b) Scrieți numărul 1 ca sumă a 6 elemente distincte ale mulțimii A.

23. Se consideră numerele raționale pozitive

$$A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$$

$$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2004}{2005}.$$

a) Calculați $A-B$ și A^B.
b) Calculați $(B-2000)^{A+1}$.

24. *a)* Să se arate că $\frac{1}{k\cdot(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{98\cdot100}+\frac{1}{99\cdot101}$.

25. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor raționale:
a) $7-4(x+1)=10$.
b) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{5}{6}$.

26. Se consideră mulțimile: $A=\left\{-3;-5,(1);2,3;-\frac{8}{5};4,3(2)\right\}$, $B=\{b\mid b=-x \text{ și } x\in A\}$ și $C=\{c\mid c=|x| \text{ și } x\in A\}$

a) Determinați elementele mulțimilor B și C.
b) Determinați elementele mulțimilor $B\cap C$ și $A\setminus C$.

27. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3x+8}{x+6}\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Verificați dacă $-5\in A\cap B$.
b) Determinați $A\cap B$.

28. Demonstrați că următoarele numere sunt întregi:

a) $A=\frac{2^{80}-5\cdot2^{81}+7\cdot2^{79}}{11}$; *b)* $B=\frac{3^n+4\cdot3^{n+1}-5\cdot3^{n+2}}{8}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

29. Se consideră numerele: $a=\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3$ și $b=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

a) Determinați numerele a și b.
b) Rezolvați ecuația $a\cdot x+b=41$.

30. Un elev are o sumă de bani. Determinați suma de bani știind că după ce a cheltuit $\frac{1}{4}$ din ea, apoi $\frac{1}{6}$ din rest, apoi $\frac{1}{3}$ din noul rest și încă 120 lei, i-au mai rămas 600 lei.

31. Un automobil a parcurs o distanță în trei zile astfel: în prima zi a parcurs $\frac{7}{20}$ din drum, a doua zi a parcurs $\frac{2}{5}$ din distanța rămasă, iar a treia zi a parcurs restul de 624 km.

a) Câți km a parcurs automobilul a doua zi?
b) Câți km are întreaga distanță?

32. O persoană cheltuieşte o sumă de bani în trei zile astfel: în prima zi cheltuieşte două treimi din sumă şi încă 15 lei, a doua zi cheltuieşte 40% din rest, iar a treia zi cheltuieşte restul de 27 de lei.
a) Aflaţi ce sumă a cheltuit persoana a doua zi.
b) Aflaţi ce sumă a avut iniţial persoana.

33. Aflaţi media aritmetică a zece numere raţionale, ştiind că media aritmetică a primelor două numere este 5, media aritmetică a următoarelor trei numere este 25, iar media aritmetică a ultimelor cinci numere este 125.

34. După ce a parcurs $\frac{5}{8}$ dintr-un drum, un automobilist observă că mai are de parcurs 93 km. Aflaţi lungimea întregului drum.

35. Să se afle trei numere, ştiind că primul este $\frac{3}{4}$ din al doilea şi cu 40 mai mic decât al treilea , iar media aritmetică a celor trei numere este 80.

36. O suprafaţă agricolă a fost arată în patru zile, astfel: în prima zi $\frac{3}{7}$ din toată suprafaţa, în a doua zi $\frac{5}{8}$ din rest, în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest, iar în a patra zi restul. În a doua zi a arat cu 75000 m^2 mai mult decât în a patra zi.
a) Câte hectare are întreaga suprafaţă ?
b) Câte hectare a arat în fiecare zi ?

37. Media aritmetică a două numere raţionale pozitive este 16,75 iar raportul lor este 1,2(3). Aflaţi numerele.

38. În trei zile o persoană cheltuieşte o sumă de bani. În prima zi persoana cheltuieşte o pătrime din sumă, a doua zi cheltuieşte jumătate din suma rămasă, iar a treia zi cheltuieşte restul de 375 lei.
a) Ce sumă de bani a cheltuit persoana în a doua zi?
b) Ce sumă de bani a cheltuit persoana în cele trei zile?
c) Cu cât la sută este mai mare suma de bani cheltuită a doua zi faţă de suma de bani cheltuită în prima zi?

39. Se amestecă un litru de apă rece cu temperatura de 15°C cu patru litri de apă caldă cu temperatura $x°$ C. Determinaţi x ştiind că temperatura amestecului este 31°C.

40. Un dreptunghi are perimetrul de 20,36 cm. Ştiind că lungimea este cu 2,5 cm mai mare decât lăţimea, calculaţi aria dreptunghiului.

Tema 1.5
Rapoarte. Proporţii. Procente. Probabilităţi

Raport. Prin *raportul* numerelor raţionale pozitive a şi b, cu $b \neq 0$, se înţelege numărul raţional $a:b$, notat $\frac{a}{b}$. Scrierea $\frac{a}{b}$ este *raportul*, iar a şi b sunt *termenii* raportului.

Valoarea unui raport $\frac{a}{b}$ este numărul c care se obţine din relaţia $c = a : b$.

Exemplu. Într-o clasă sunt 12 fete şi 16 băieţi. Spunem că raportul dintre numărul fetelor şi cel al băieţilor este egal cu $\frac{12}{16}$. Valoarea raportului este $12:16 = 0,75$.

1. La scrierea raportului a două mărimi, de aceeaşi natură, acestea trebuie exprimate în aceeaşi unitate de măsură. De exemplu, dacă lăţimea unui dreptunghi este egală cu 120 cm, iar lungimea este egală cu 3,6 m, pentru a afla raportul dintre lăţime şi lungime, întâi transformăm: $L = 3,6\,\text{m} = 360\,\text{cm}$ şi apoi avem: $\frac{l}{L} = \frac{120\,\text{cm}}{360\,\text{cm}} = \frac{1}{3}$.

2. Se pot forma rapoarte şi cu cantităţi de tipuri diferite. De exemplu, dacă unui om îi trebuie 3 ore pentru a parcurge 12 km, atunci se formează raportul $\frac{12\,\text{km}}{3\,\text{h}} = 4$ km/h.

Formarea raportului a dus la un nou concept, de *viteză*, cu unitatea de măsură km/h.

Exemple de rapoarte utilizate în practică

1. *Scara unei hărţi* este raportul dintre distanţa pe hartă şi distanţa pe teren.

2. *Concentraţia unei soluţii* este raportul dintre masa substanţei care se dizolvă şi masa soluţiei.

3. *Titlul unui aliaj* este raportul dintre masa metalului preţios şi masa aliajului.

Exemple.
a. Pe o hartă, unui segment ce are lungimea de 1 cm îi corespunde o distanţă în teren egală cu 2 km. Deoarece 2 km = 200 000 cm, scara hărţii este 1 : 200 000.
b. În 190 g de apă se dizolvă 10 g sare. Concentraţia soluţiei este egală cu:
$$\frac{10}{190+10} = \frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\%.$$
c. Un aliaj conţine 240 g aur şi 960 g cupru. Titlul aliajului este egal cu:
$$\frac{240}{240+960} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} = \frac{200}{1000} = 0,2\,.$$

Raportul procentual este un raport de forma $\frac{p}{100}$, care se notează $p\%$.

Dacă $p\%$ din x este egal cu y, scriem $\frac{p}{100} \cdot x = y$. În această relaţie $p\%$ reprezintă *raportul procentual*, ceea ce scrie după cuvântul *din*, adică x, reprezintă *întregul*, iar y reprezintă partea corespunzătoare din întreg. Avem trei tipuri de aplicaţii:

a. Aflarea raportului procentual (se cere $p\%$): $\frac{p}{100} \cdot x = y$.

b. Determinarea a $p\%$ dintr-un număr dat x (se cere y): $p\%$ din $x = \frac{p}{100} \cdot x$.

c. Aflarea unui număr când se știe $p\%$ din el (se cere x):

$$p\% \text{ din } x = y \Leftrightarrow \frac{p}{100}\cdot x = y \Rightarrow y = x : \frac{p}{100} = x \cdot \frac{100}{y}$$

Exemple.

a. O gospodină a cheltuit 90 de lei din cei 150 de lei pe care îi avea. Cât la sută din sumă a cheltuit?

Rezolvare. Avem $p\% = \frac{90}{150}\cdot 100 = \frac{3}{5}\cdot 100 = 60 \Rightarrow p\% = 60\%$.

b. O gospodină avea la ea 150 de lei și a cheltuit la magazin 60% din sumă. Ce sumă a cheltuit?

Rezolvare. Știm raportul procentual și întregul: $60\% \text{ din } 150 = \frac{60}{100}\cdot 150 = 6\cdot 15 = 90$ lei.

c. O gospodină a cheltuit 60% din suma pe care o avea, adică 90 lei. Ce sumă avea gospodina la ea ?

Rezolvare. Fie s suma pe care o avea gospodina. Atunci:

$$60\% \text{ din } s = 90 \Leftrightarrow \frac{60}{100}\cdot s = 90 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cdot s = 90 \Leftrightarrow s = 90 : \frac{3}{5} \Leftrightarrow s = 90 \cdot \frac{5}{3} = 150 \text{ lei}$$

Creșteri și scăderi cu $p\%$. Dacă un număr x crește, respectiv scade cu $p\%$, atunci:

când crește devine: $x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} + \frac{p}{100}\right)x = \frac{100+p}{100}x = (100+p)\%\ x$,

când scade devine: $x - \frac{p}{100}x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} - \frac{p}{100}\right)x = \frac{100-p}{100}x = (100-p)\%\ x$.

Proporții. Egalitatea a două rapoarte se numește *proporție*.

Dacă rapoartele $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ au aceeași valoare, ele formează proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, iar numerele a, b, c, d se numesc *termenii proporției*.

Termenii a și d se numesc *extremi*, iar termenii b și c se numesc *mezi*.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor. Într-o proporție produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \text{, unde } b \neq 0 \text{ și } d \neq 0.$$

Reciproc, dacă numerele a, b, c, d verifică relația $ad = bc$, atunci ele pot fi termenii unei proporții.

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție. Dacă într-o proporție un singur termen este necunoscut, din proprietatea fundamentală a proporției, acesta se poate determina astfel:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}} \quad \text{sau} \quad \text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}.$$

Proporții derivate

1. Proporții derivate cu aceiași termeni:

a. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (schimbarea extremilor între ei)

b. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (schimbarea mezilor între ei)

c. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (inversarea fiecărui raport)

2. Proporții derivate cu alți termeni:

a1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$;

a2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$, în cazul $b \neq d$.

b1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$;

b2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$, în cazul $a \neq b$.

c1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

c2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

d1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{nc}{nd}$;

d2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{mb} = \frac{c}{md}$, unde $m \neq 0$ și $n \neq 0$.

e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ka}{ma+nb} = \frac{kc}{mc+nd}$, unde $k, m, n \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $ma + nb \neq 0$.

Exemple:

a1. $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2+6}{3+9} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$;

a2. $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6-2}{9-3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$;

b1. $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{2+3} = \frac{6}{6+9} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$;

b2. $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3-2} = \frac{6}{9-6} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$;

c1. $\frac{5}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{5+4}{4} = \frac{15+12}{12} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{27}{12}$;

c2. $\frac{5}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{5-4}{4} = \frac{15-12}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$;

d1. $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{5\cdot 6}{5\cdot 12} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{30}{105}$;

d2. $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Rightarrow \frac{2}{4\cdot 7} = \frac{6}{4\cdot 21} \Leftrightarrow \frac{2}{28} = \frac{6}{84}$;

e. $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow \frac{2\cdot 5}{4\cdot 3 + 7\cdot 5} = \frac{2\cdot 10}{4\cdot 6 + 7\cdot 10} \Leftrightarrow \frac{10}{47} = \frac{20}{94}$.

Șir de rapoarte egale. Mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un *șir de rapoarte egale*: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Proprietatea 1. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$, unde $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$.

Exemplu: $\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{30}{70} = \frac{3+6+30}{7+14+70} = \frac{39}{91}$.

Proprietatea 2. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 k + a_2 m + \ldots + a_n r}{b_1 k + b_2 m + \ldots + b_n r}$, unde $b_1 k + b_2 m + \ldots + b_n r \neq 0$.

Exemplu: $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{5\cdot 3 + 10\cdot 7 + 15\cdot 6}{2\cdot 3 + 4\cdot 7 + 6\cdot 6} = \frac{175}{70}$.

Mărimi direct proporționale. Două mărimi variabile sunt *direct proporționale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una crește de un număr de ori, atunci și cealaltă crește de același număr de ori. De exemplu, dacă 1 kg de fructe costă 1,5 lei, atunci 2 kg costă de două ori mai mult, 3 kg costă de trei ori mai mult etc. Între cantitate și cost e o relație de directă proporționalitate.

În general, între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate directă, dacă și numai dacă se poate forma un șir de *rapoarte* egale, astfel încât mulțimea numărătorilor rapoartelor să fie una din mulțimi, iar mulțimea numitorilor rapoartelor să fie cealaltă mulțime. În cele ce urmează vom folosi notația $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ pentru a desemna o mulțime ordonată (ordinea elementelor nu poate fi modificată).

Definiție. Mulțimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ este direct proporțională cu mulțimea

ordonată $(b_1, b_2, b_3, ..., b_p)$ dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_p}{b_p}$. Valoarea comună a acestor rapoarte se numeşte coeficient de proporţionalitate şi se notează, de regulă, cu k, unde $k \neq 0$.

Exemplu. Mulţimea ordonată (3, 9, 15) este direct proporţională cu mulţimea ordonată (1, 3, 5), deoarece $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{15}{5}$. Coeficientul de proporţionalitate este egal cu 3.

Mărimi invers proporţionale. Două mărimi variabile sunt *invers proporţionale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una creşte de un număr de ori, atunci cealaltă scade de acelaşi număr de ori. De exemplu, 10 m de stofă se pot cumpăra cu o anumită sumă de bani Dacă preţul stofei ar fi de două ori mai mic, atunci cu aceeaşi sumă de bani s-ar cumpăra 20 m de stofă. Dacă preţul stofei ar fi de trei ori mai mic, atunci cu aceeaşi sumă de bani s-ar cumpăra de trei ori mai multă stofă. Preţul stofei şi lungimea cuponului cumpărat sunt mărimi invers proporţionale.

În general, între două mulţimi finite de numere se stabileşte o proporţionalitate inversă, dacă şi numai dacă se poate forma un şir de *produse* egale, astfel încât primul factor al fiecărui produs să fie element al unei mulţimi, iar cel de-al doilea factor să fie element al celeilalte mulţimi.

Definiţie. Mulţimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, ..., a_p)$ este direct proporţională cu mulţimea ordonată $(b_1, b_2, b_3, ..., b_p)$ dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = a_p \cdot b_p$.

Exemplu. Mulţimea {3; 4; 6} este invers proporţională cu {4; 3; 2}, deoarece $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$.

Regula de trei simplă este procedeul folosit pentru a determina numărul necunoscut dintr-o mulţime de două elemente, dacă între acea mulţime şi o altă mulţime ale cărei elemente sunt cunoscute există o relaţie de directă proporţionalitate sau de inversă proporţionalitate.

Pentru a rezolva concis o problemă, aplicând *regula de trei simplă,* convenim să comparăm mintal mărimile de acelaşi fel şi ilustrăm concluzia la care am ajuns cu o săgeată orientată cu vârful spre elementul mai mare:

- dacă săgeţile sunt orientate în acelaşi sens, mărimile sunt direct proporţionale;
- dacă săgeţile au sensuri opuse, mărimile sunt invers proporţionale.

Problema 1. 3 kg de mere costă 15 lei. Cât costă 7 kg de mere de aceeaşi calitate?

Rezolvare:

3 kg de mere ..... 15 lei
7 kg de mere ..... x lei

S-a *mărit* cantitatea de mere, *se va mări* şi preţul şi am orientat săgeţile, conform convenţiei menţionate anterior. Deducem că mărimile (cantitatea de mere şi preţul) sunt direct proporţionale. Folosind metoda proporţiei, scriem cele două rapoarte în ordinea sugerată de datele problemei.

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 7}{3} = 35 \text{ lei.}$$

Problema 2: Patru muncitori execută o lucrare în 6 zile. În câte zile ar termina acea lucrare 3 muncitori, lucrând cu aceeaşi îndemânare ?

Rezolvare:

4 muncitori ..... 6 zile
3 muncitori ..... x zile

S-a *micşorat* numărul muncitorilor, *se va mări* numărul zilelor. Deducem că cele două mărimi (numărul muncitorilor şi timpul necesar) sunt invers proporţionale. Vom folosi metoda proporţiei, dar scriem inversul celui de-al doilea raport sugerat de datele problemei, iar primul rămâne neschimbat.

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8. \text{ Sunt necesare 8 zile.}$$

Probabilităţi

Să considerăm următoarele *experimente* ce pot avea cel puţin două rezultate posibile:

1. Extragerea unei bile dintr-o urnă. Dacă bilele sunt identice ca formă sau greutate dar diferă prin culoare şi extragem bila fără a privi în urnă atunci este posibilă extragerea oricărei bile. Dacă în urnă sunt bile de trei culori diferite, atunci sunt trei rezultate posibile ale acestui experiment.
2. Aruncarea unui zar. Oricare dintre cele şase feţe ale sale poate apărea, deci experimentul are şase rezultate posibile.
3. Aruncarea unei monezi. Sunt două rezultate posibile.

Vom numi *eveniment* rezultatul pe care dorim să îl obţinem.

Exemple.
1. Extragerea unei bile de o anumită culoare.
2. Apariţia feţei cu şase puncte.
3. Apariţia feţei pe care este înscrisă valoarea monedei.

Definiţie. Probabilitatea ca un anumit eveniment să se producă este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului şi numărul cazurilor posibile experimentului.

Notând cu n_f numărul cazurilor favorabile realizării unui anumit eveniment/experiment eveniment A şi cu n_p numărul tuturor cazurilor posibile, probabilitatea p de realizare a evenimentului A este: $p(A) = \frac{n_f}{n_p}$, unde $n_f, n_p \in \mathbb{N}$, $n_p \neq 0$, iar $n_f \leq n_p$.

Exemplu. Dintr-o urnă ce conţine 8 bile albe şi 9 bile negre extragem o bilă. Extragerea unei bile albe este un eveniment pe care îl vom nota cu A. Extragerea unei bile negre este un al doilea eveniment pe care îl notăm cu N. Întrucât oricare dintre bile poate fi extrasă, sunt 17 cazuri posibile. Pentru realizarea evenimentului A sunt 8 cazuri favorabile, iar pentru evenimentul N sunt 9, deci $P(A) = \frac{8}{17}$ şi $P(N) = \frac{9}{17}$.

Evenimentul *sigur* este cel pentru care $p = 1$ (toate cazurile posibile sunt favorabile) şi eveniment *imposibil* când $p = 0$ (nici un caz posibil nu este favorabil).

Exemplu. Într-o urnă sunt 3 bile roşii şi 5 bile albe. Calculaţi:
a. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să nu fie neagră;
b. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie verde.

Soluţie.
a. În urnă fiind numai bile albe şi roşii sigur nu se poate extrage o bilă neagră:

$$n_f = 3 + 5 = 8, \; n_p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{8} = 1$$

b. Este imposibil să extragem o bilă verde, dacă în urnă sunt numai bile albe şi roşii:

$$n_f = 0, \quad n_p = 8 \Rightarrow p = \frac{0}{8} = 0.$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Se știe că $\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$ și $\frac{y}{z}=\frac{7}{12}$. Valoarea raportului $\frac{x}{z}$ este ... .

2. Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este 5. Dacă $b=12,4$, atunci $a=$ ... .

3. Un dreptunghi are lungimea de 21 m și lățimea de 7 m. Raportul dintre lățime și perimetru este ... .

4. Raportul dintre ariile totale a două cuburi este 0,25. Raportul volumelor lor este ... .

5. Suma termenilor unui raport supraunitar este 30, iar diferența lor este 6. Valoarea raportului este egală cu ... .

6. Numerele naturale a și b verifică relația $\frac{a}{b}=\frac{13}{20}$. Atunci a este egal cu ... % din b.

7. O bancă acordă o dobândă anuală de 6%. După trei luni, Victor încasează o dobândă de 30 lei. Suma depusă de Victor la bancă este de ... lei.

8. În 200 g de apă se pun 40 g de zahăr. Concentrația soluției este de ... .

9. O soluție de sare are concentrația de 13%. După evaporarea apei din 100 g de soluție, rămâne o cantitate de sare cu masa de ... grame.

10. Concentrația unei soluții este 8%. Atunci 10 g de sare se găsesc în ... grame de soluție.

11. O canapea costă 800 de lei. Prețul ei se micșorează cu 6%. Noul preț este ... lei.

12. Salariul unui funcționar este de 1100 lei. El se mărește cu 7%. Noul salariu este ... lei.

13. Probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare pe x cu o cifră, numărul $\overline{432x}$ să fie divizibil cu 4 este egală cu ... .

14. Probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare pe x cu o cifră, numărul $\overline{6x7x8}$ să fie divizibil cu 9 este egală cu ... .

15. Probabilitatea ca, la aruncarea unui zar, să se obțină un multiplu de 2, este egală cu ... .

16. Probabilitatea ca, la aruncarea a două zaruri, să se obțină două numere cu suma multiplu de 5 este egală cu ... .

17. Într-o urnă sunt 10 bile roșii, 12 albe și 8 negre. Probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie albă este ... .

18. Într-o urnă sunt 10 bile roșii, 12 albe și 8 negre. Probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să nu fie neagră este ... .

19. O proporție cu termenii 3, 6, 8, 4 este ... .

20. Numărul rațional nenul n din proporția $\frac{3}{n}=\frac{14}{42}$ este ... .

21. Numărul natural a dacă $\frac{a+2}{39}=\frac{7}{13}$ este egal cu ... .

22. Raportul dintre numerele raționale a și b este $\frac{a}{b}=\frac{2}{7}$. Atunci $\frac{a}{a+b}=$ ... .

23. Numerele raționale a și b verifică relația $\frac{a}{3a+2b}=\frac{5}{22}$. Raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu ... .

24. Extremii unei proporții sunt 2,1 și 6,5, iar unul dintre mezi este 3,9. Celălalt med este egal cu ... .

25. Un extrem al unei proporții este 2,64, iar mezii proporției sunt 3,96 și 7,2. Celălalt extrem este egal cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

26. Numerele naturale x, y, z verifică egalitățile $\frac{x}{z}=\frac{y}{15}$ și $yz=135$. Aflați numărul x.

27. Împărțiți numărul 11200 în părți direct proporționale cu 19, 24 și 7.

28. Aflați numerele naturale m și n știind că 32, m, 24 sunt direct proporționale cu n, 5, 6.

29. Numerele raționale a, b și c sunt direct proporționale cu 0,(2), 0,(3) și 0,(4). Știind că $c-a=10$, determinați valoarea sumei $a+2b+c$

30. Determinați cifra x astfel încât numerele $\overline{4x}$ și $\overline{x4}$ să fie direct proporționale cu 4 și 7.

31. Aflați două numere cu suma 60, știind că sunt direct proporționale cu 11 și 13.

32. Din 56 kg de struguri se storc 42 litri de must. Aflați câte kg de struguri sunt necesare pentru a obține 60 litri de must.

33. O echipă de 15 muncitori termină o lucrare în 8 zile. Aflați în cât timp se execută lucrarea dacă echipa ar conține 12 muncitori.

34. Numerele raționale a și b au raportul 4 și diferența 18.
a) Determinați media aritmetică a numerelor a și b.
b) Calculați media geometrică a lui a și b.

35. Se dă proporția $\frac{2a-1}{5a-4}=\frac{5}{12}$.
a) Aflați numărul rațional a din proporția de mai sus.
b) Determinați numărul rațional b pentru care cele două fracții din proporție și $\frac{2b+8}{7b-5}$ formează un șir de rapoarte egale.

36. Într-o clasă cu 30 de elevi, 30% dintre ei au media de 10 la fizică, 50% au media 10 la matematică și 40% au media 10 la chimie.
a) Câți elevi au media 10 la fizică, câți la matematică și câți la chimie?
b) Ce procent reprezintă numărul elevilor de 10 la fizică din cel al elevilor de 10 la matematică?
c) Arătați că cel puțin 6 elevi au media 10 la una dintre disciplinele matematică, fizică sau chimie.

37. Trei persoane au depus la bancă sume direct proporționale cu 4, 6 și 14. Dobânda oferită de bancă este 8% pe an. După un an aveau la bancă în total 9072 lei.
a) Ce sumă de bani a depus inițial fiecare persoană?
b) Ce sumă de bani avea în bancă după un an fiecare persoană?
c) Ce procent reprezintă suma celei de-a treia persoane din suma sumelor primelor două persoane după un an?

38. După o reducere de preț egală cu 8%, un aspirator se poate cumpăra cu 322 lei.
a) Calculați prețul inițial al aspiratorului.
b) Care este cel mai mic număr natural p pentru care, după o reducere cu $p\%$ a prețului aspiratorului, astfel încât acesta să coste mai puțin de 300 lei?

39. Adi citește un roman scris în trei volume, care au în total 3000 de pagini. Fiind pasionat de matematică, Adi observă că dacă numărul paginilor primului volum ar fi mai mic cu 75%, numărul paginilor celui de-al doilea ar fi mai mic cu 80%, iar cel de-al treilea ar conține cu $\frac{2}{3}$ mai puține pagini, ar fi un număr egal de pagini în fiecare volum.
a) Câte pagini are fiecare volum?
b) Dacă Adi citește un număr egal de pagini în fiecare zi, ce procent din timpul necesar citirii celui de-al doilea volum îl reprezintă timpul necesar citirii celui de-al treilea volum?

40. La livrarea din fabrică către dealer, un autoturism are prețul de 7500 euro. Dealer-ul auto aplică un comision de 40%, iar la suma obținută se adaugă taxa pe valoare adăugată (TVA), în valoare de 24%, obținându-se astfel prețul de vânzare al autoturismului. Dacă un cumpărător achită un avans de 20% din prețul de vânzare, restul banilor îi poate achita în 24 rate lunare egale.
a) Care este valoarea TVA?
b) Care este prețul de vânzare al autoturismului?
c) Cât reprezintă rata lunară?

41. O soluție de sare cu apă are masa 240 g și concentrația de 15%.
a) Care este masa sării din soluție?
b) Câtă apă trebuie adăugată pentru a obține o soluție cu concentrația de 10% ?

42. Într-o bibliotecă sunt 16 000 de cărți din care 90% sunt în limba română,iar 80% din numărul cărților în limbi străine sunt în limba engleză. Cât la sută din cele 16 000 de cărți sunt în limba engleză?

43. Din numărul total al volumelor aflate în biblioteca unei școli, 60% sunt cărți de literatură, 36% sunt culegeri școlare, iar restul de 168 de volume sunt dicționare.
a) Ce procent reprezintă numărul culegerilor din numărul cărților de literatură ?
b) Câte volume sunt în total în bibliotecă?
c) Cu ce procent trebuie să se mărească fondul de carte existent pentru ca biblioteca să conțină 5000 de volume?

44. Într-o cutie sunt 120 de bile albe, negre și roșii. Numărul bilelor roșii este de trei ori mai mic decât al bilelor albe și negre la un loc, iar numărul bilelor albe este cu 18 mai mare decât al celor negre.
a) Câte bile de fiecare culoare sunt în cutie?
b) Care este probabilitatea ca extrăgând o bilă din cutie, aceasta să fie roșie?

45. Se consideră o hartă care are scara 1 :800.000.
a) Calculați distanța de pe hartă, exprimată în cm, dintre orașele București și Iași, știind că acestea se află la 400 km unul de altul.
b) Ce distanță, exprimată în kilometri, este între Constanța și București, dacă pe hartă drumul dintre ele are lungimea de 27,5 cm?

46. Într-un depozit erau 1 200 tone de marfă. În prima săptămână s-au vândut 10% din cantitatea de marfă, iar în a doua săptămână 15% din rest.
a) Câte tone s-au vândut în fiecare săptămână?
b) Cât la sută din marfă a rămas în depozit după a doua săptămână?

47. Prețul unui obiect se mărește de două ori succesiv cu câte 20%.
a) Aflați prețul inițial al obiectului știind că prețul acestuia după cele doua măriri este de 432 lei.
b) Cu ce procent ar fi trebuit făcută o singură mărire de preț astfel ca obiectul să ajungă la prețul de după cele două măriri?

48. O agendă costă 15 lei dar în cazul în care sunt cumpărate cel puțin 10 bucăți se oferă o reducere de 10% din valoare.
a) Ce sumă de bani trebuie să achite cineva care dorește să achiziționeze 9 agende?
b) Ce sumă de bani trebuie să achite cineva care dorește să achiziționeze 10 agende?

49. Un gospodar are în curte rațe, curci și găini, în total 100 de păsări. Ele pot fi grupate astfel încât la o curcă să corespundă 2 găini, iar la 3 curci o rață.
a) Determinați raportul dintre numărul de găini și numărul de rațe.
b) Aflați câte păsări de fiecare fel sunt în curte.
c) Dacă cele 100 de păsări mănâncă, în medie, 100 kg de boabe în 100 zile, câte kg mănâncă 10 păsări în 10 zile ?

50. Mihai avea 20 de lei din care dorea să își cumpere caiete al căror preț este de 1 leu. Între timp acestea s-au scumpit cu 10%. Câte caiete poate să cumpere acum?

51. Pentru a obține făină din grâu, se pierde 20% din cantitatea de grâu. Din cât grâu se pot obține 650 kg de făină?

52. Se știe că 21% dintr-o cantitate de lapte este smântână, iar 25% dintr-o cantitate de smântână este unt. Aflați din câte kilograme de lapte se pot obține 52,5 kg de unt.

53. Într-o fabrică se execută 15 000 de piese de același fel. În prima etapă se execută 20% din numărul de piese, în a doua etapă 50% din rest, iar în a treia etapă restul.
a) Câte piese au fost realizate în fiecare etapă?
b) Cât la sută din producția totală a fost realizată în a doua etapă?
c) Cu cât la sută a crescut producția în a doua etapă?

54. Îmi creez un depozit la bancă. În primul an am primit 12% dobândă, iar în al doilea an dobânda a fost de 15%. Am acum 579,6 lei. Câți lei am depus inițial?

55. Prețul unui obiect a crescut cu 10% și după un timp a scăzut cu 10%. Știind că după reducere costă 44,55 lei, determinați prețul inițial.

56. După două creșteri consecutive de preț cu 20% din prețul inițial și respectiv 15% din noul preț, un obiect a ajuns să coste cu 760 lei mai mult decât era prețul inițial. Determinați prețul inițial și cel de după prima creștere.

57. Determinați numerele a, b, c știind că a și b sunt direct proporționale cu 5 și 8, b și c sunt invers proporționale cu 3 și 2, iar $3a+2b-c=57$.

58. O echipă de 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimiși să lucreze în altă parte. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas?

59. Un număr de 6 muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile, lucrând câte 8 ore pe zi. După 4 zile 2 muncitori pleacă. În cât timp va fi terminată lucrarea, dacă cei rămași lucrează câte 6 ore pe zi?

60. Pentru o evaluare au fost propuse 48 subiecte. Un elev are deja rezolvate 32 de variante. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o variantă, aceasta să nu fie rezolvată de elev ?

Tema 1.6

Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali

Rădăcina pătrată a numărului raţional pozitiv a este numărul raţional x cu proprietatea $x^2 = a$. Se notează $x = \sqrt{a}$ şi se citeşte *radical din a*.

Observaţie. Dacă a este un număr raţional pozitiv, atunci există două numere distincte al căror pătrat este a, şi anume $\sqrt{a}$ şi $-\sqrt{a}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Proprietăţi:

1. $\sqrt{a} \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{Q}_+$. **2.** $(\sqrt{a})^2 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}_+$. **3.** $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.

Exemple. $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$; $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; $\sqrt{6,25} = 2,5$.

$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$; $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Raţionalizarea numitorilor unui raport reprezintă operaţia de eliminare a radicalului de la numitorul raportului respectiv, fără a modifica valoarea raportului. De exemplu, dacă numitorul unui raport de numere reale este un număr iraţional de forma $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}^*, b > 0$, prin amplificarea raportului cu $\sqrt{b}$, numitorul devine un număr raţional. Se spune că am *raţionalizat numitorul*.

1. Dacă $a, c \in \mathbb{R}^*$ şi $b > 0$, atunci $\frac{c}{a\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b})c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{a\sqrt{b^2}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$.

2. Dacă $a, c, d \in \mathbb{R}$ şi $b > 0$, atunci:

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a-\sqrt{b})c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}, \text{ unde } a \neq -\sqrt{b};$$

$$\frac{d}{a-\sqrt{b}} = \frac{(a+\sqrt{b})d}{a-\sqrt{b}} = \frac{d(a+\sqrt{b})}{a^2-b}, \text{ unde } a \neq \sqrt{b}.$$

Observaţie. Expresiile de tipul $a+\sqrt{b}$ şi $a-\sqrt{b}$ sunt reciproc *conjugate*.

Raţionalizarea unui raport al cărui numitor conţine radicali se face amplificând raportul cu conjugatul numitorului.

Exemple. **1.** $\frac{3}{2-\sqrt{3}} \overset{(2+\sqrt{3})}{=} \frac{3(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{6+3\sqrt{3}}{4-3} = 6+3\sqrt{3}$.

2. $\frac{5}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \overset{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{=} \frac{5(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{8-3} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Mulţimea numerelor reale

Mulţimea numerelor reale se notează cu $\mathbb{R}$. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) este mulţimea *numerelor iraţionale*.

În scrierea ca fracţie zecimală, numerele iraţionale au partea zecimală infinită şi neperiodică.

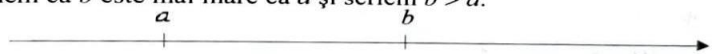
Exemple de numere iraţionale.

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$, $-3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}+7$, $-4\sqrt{3}+5$.

2. 0,1010010001000010... (după fiecare cifră 1 sunt numărul zerourilor scrise creşte cu 1).

3. Dacă numărul natural n nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este număr iraţional.

Compararea numerelor reale. Fie a şi b două numere reale astfel încât a este reprezentat pe axa numerelor la stânga lui b. Spunem că a este mai mic decât b şi scriem $a < b$ sau spunem că b este mai mare ca a şi scriem $b > a$.



Dacă $a < b$ sau $a = b$ spunem că a este mai mic sau egal cu b şi scriem $a \leq b$ sau că b este mai mare sau egal cu a şi scriem $b \geq a$.

Modulul unui număr real x, notat $|x|$, este distanţa de la origine la punctul ce îl reprezintă pe o axă a numerelor.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}.$$

Proprietăţile modulului unui număr real

1. $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **2.** $|x| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

3. $|x| = |-x|$, oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{R}$. **4.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

5. $|x+y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **6.** $|x-y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

7. $||x| - |y|| \leq |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **8.** $\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{R}$.

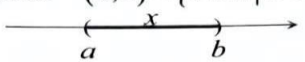
9. Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $a > 0$, atunci $|x| < a$ dacă şi numai dacă $-a < x < a$.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $a > 0$, atunci $|x| > a$ dacă şi numai dacă $x < -a$ sau $x > a$.

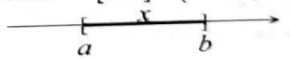
Intervale. Un *interval* este o submulţime nevidă I a mulţimii $\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $u, v \in I$, $u < v$, dacă x este un număr real cuprins între u şi v, atunci $x \in I$.

1. **Intervale mărginite:** sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este un segment. Un interval mărginit poate fi:

a. deschis: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



b. închis: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



c. semiînchise / semideschise:

- închis la stânga şi deschis la dreapta: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;



- deschis la stânga şi închis la dreapta: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.



Observaţie. Un interval închis cu capetele egale se reduce la un punct: $[a,a] = \{a\}$.

2. Intervale nemărginite: sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este o semidreaptă. Un interval nemărginit poate fi:

a. nemărginit la stânga și mărginit la dreapta:

- deschis la dreapta: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



- închis la dreapta: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$



b. nemărginit la dreapta și mărginit la stânga:

- deschis la stânga: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



- închis la stânga: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$



Observație. Mulțimea $\mathbb{R}$ este un interval nemărginit: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Operații cu numere reale

Adunarea este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y, i se asociază un număr real, notat $x + y$, numit *suma* numerelor x și y.

Scăderea este operația prin care, oricărei perechi de numere reale x și y, i se asociază numărul real $x + (-y)$, numit *diferența* numerelor x și y, notat $d = x - y = x + (-y)$.

Proprietățile operației de adunare

1. Adunarea este *asociativă*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Numărul real 0 este *element neutru*: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3. Orice număr real a are un *opus notat* $-a$ cu proprietatea: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

4. Adunarea este *comutativă*: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Înmulțirea este operația prin care, oricărei perechi de numere reale x și y i se asociază un număr real, notat $x \cdot y = xy$, numit *produsul* numerelor x și y.

Împărțirea este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y, $y \neq 0$, i se asociază un număr real, notat $x : y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, numit *câtul* numerelor x și y.

Proprietățile operației de înmulțire

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Numărul real 1 este *element neutru*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ cu proprietatea $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

4. Înmulțirea este *comutativă*: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Înmulțirea este *distributivă* în raport cu adunarea și scăderea numerelor reale:
$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ și, pentru $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Spunem că a^n este puterea n a numărului real a. În scrierea a^n, numărul a se numește *baza* puterii, iar numărul n se numește *exponentul* puterii. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a^1 = a$, iar dacă $a \neq 0$, definim $a^0 = 1$. Expresia 0^0 este *operație fără sens*.

Reguli de calcul cu puteri. Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$ avem:

1. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$; **2.** $a^m : a^n = a^{m-n}$; **3.** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; **5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Rădăcina pătrată a unui număr real $a \ge 0$ este numărul real r, $r \ge 0$, cu proprietatea $r^2 = a$. Notăm: $r = \sqrt{a}$.

Reguli de calcul cu radicali

1a. $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$. **1b.** $(\sqrt{a})^2 = a$, oricare ar fi $a \ge 0$.

2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, pentru $a \ge 0, b \ge 0$. Consecință: $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pentru $a \ge 0$ și $b > 0$. Consecință: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt{a})^n}{(\sqrt{b})^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Introducerea factorilor sub radical: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ dacă } a \ge 0, b \ge 0 \\ -\sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ dacă } a < 0, b \ge 0 \end{cases}$.

5. Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și $b \ge 0$.

Medii. Dacă a și b sunt numere reale, $a \le b$, atunci orice număr $m \in [a, b]$ este o *medie* a numerelor a și b.

1. Media aritmetică a numerelor a și b este numărul real $m_a = \frac{a+b}{2}$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

2. Media aritmetică ponderată. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt numere reale pozitive. Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, este numărul real

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Observație: Dacă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, atunci media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ coincide cu media lor aritmetică.

3. Media geometrică a numerelor reale pozitive a și b este numărul $m_g = \sqrt{ab}$.

4. Media armonică a numerelor reale $a, b > 0$ este numărul $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

5. Media pătratică a numerelor reale $a, b \ge 0$ este numărul $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

6. Inegalitatea mediilor. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ și $a \le b$, atunci

$$a \le m_h(a,b) \le m_g(a,b) \le m_a(a,b) \le m_p(a,b),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Dintre numerele $a=9$ și $b=\sqrt{10}$ rațional este numărul ....
2. Dintre numerele $a=-4\sqrt{7}$ și $b=3,1(46)$ irațional este numărul ....
3. Rădăcina pătrată a numărului $\sqrt{81}$ este egală cu....
4. Cel mai mare număr natural mai mic decât $\sqrt{10}$ este....
5. Cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu $-\sqrt{5}$ este....
6. Dintre numerele $a=5\sqrt{2}$ și $b=4\sqrt{3}$ mai mare este numărul ....
7. Rezultatul calculului $4\sqrt{2}+\sqrt{50}$ este egal cu ....
8. Rezultatul calculului $4\sqrt{3}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+\sqrt{75}$ este egal cu...
9. Rezultatul calculului $\left(\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}:\sqrt{40}\right)^2-\left(\sqrt{45}-\sqrt{20}\right)^2$ este...
10. Calculând valoarea numărul real $a=\sqrt{2^4+2^7}$ se obține...
11. Rezultatul calculului $(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})+5$ este egal cu...
12. Calculând $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ se obține...
13. Calculând $\sqrt{5^2-3^2}\cdot\sqrt{5^2\cdot3^2}$ se obține...
14. Calculând $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ se obține...
15. Calculând media aritmetică a numerelor $x=\sqrt{2}+1$ și $y=\sqrt{2}-1$ se obține...
16. Media geometrică a numerelor $a=2$ și $b=50$ este egală cu....
17. Fie expresia $E(a)=\sqrt{(a-4)^2}+|a-2|+|-2a|$. Efectuând calculele, pentru $a=2$, se obține...
18. Numărul elementelor mulțimii $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|\le 3\}$ este egal cu...
19. Mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x|<2\}$ este egală cu intervalul...
20. Numărul $\sqrt{2}$ se rotunjește la cifra zecimilor. Rezultatul acestei rotunjiri este...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie numărul $A=2^{2n}\cdot25^n\cdot5-4^n\cdot5^{2n}$, unde $n\in\mathbb{N}$.
   a) Arătați că numărul natural A este pătrat perfect.
   b) Determinați valoarea numărului n pentru care $\sqrt{A}$ nu se divide cu 10.
22. *a)* Scrieți toate numerele de forma $\overline{xy}$, în baza zece, care sunt pătrate perfecte.
   b) Calculați cel mai mic număr de forma $\overline{ab}$, scris în baza zece, pentru care $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ este un număr natural.
23. Se consideră mulțimile:
   $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,\sqrt{x}<2\}$, $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,1\le\sqrt{y}\le3\}$ și $C=\{z\in\mathbb{Z}\,|\,z^2\in B\}$.
   a) Determinați elementele mulțimilor A și B.
   b) Calculați suma elementelor mulțimii C.
   c) Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare, un element din mulțimea C, acesta să fie pătrat perfect.
24. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,2\le\sqrt{x}<3\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,-2\le-\sqrt{x}\le-1\}$.
   a) Arătați că 4 este un element comun mulțimilor A și B.
   b) Determinați elementele mulțimilor A și B.
   c) Determinați $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ și $B-A$.
25. Considerăm numerele reale a, b și c. Se știe că $a+b=5\sqrt{3}$, iar $c=3\sqrt{3}$.
   a) Calculați $(a+b)+c$ și $a+(b+c)$;
   b) Dacă $a=-\sqrt{3}$, determinați $b-c$.
26. Se consideră numerele $a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.
   a) Comparați numerele $a\cdot b$ și $a+b$.
   b) Arătați că numărul $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ aparține intervalului $\left(\frac{4}{5};\frac{6}{5}\right)$.
27. Se consideră numerele:
   $a=\sqrt{5}\cdot(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})-2(2\sqrt{10}+3)$ și $b=2\sqrt{7}\cdot(3-\sqrt{3})+2(4+\sqrt{21})-6\sqrt{7}$.
   a) Arătați că numerele a și b sunt întregi.
   b) Calculați media aritmetică a numerelor a și b.
28. Se consideră numerele:
   $x=\sqrt{162}-\sqrt{242}+\sqrt{288}-\sqrt{98}+\sqrt{18}$ și $y=\sqrt{320}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{125}-\sqrt{180}$.
   a) Calculați x și y.
   b) Încadrați numărul x între două numere naturale consecutive.
   c) Arătați că $x\cdot y$ aparține intervalului $(-19,-18)$.
29. Fie numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
   a) Calculați $a\cdot b$.
   b) Calculați a^2+b^2.
   c) Arătați că numărul $\frac{b}{a}-\sqrt{3}$ este natural.
30. Se consideră numerele:
   $$x=4\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}+\frac{\sqrt{54}}{3}-\sqrt{6}\right)\cdot\frac{7}{\sqrt{6}}$$
   și $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{18}}-\frac{5}{\sqrt{50}}+\frac{24}{\sqrt{72}}\right)+\frac{14}{3\sqrt{7}}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{6}{\sqrt{7}}-\frac{15}{\sqrt{63}}\right)+1$.
   a) Arătați că numerele x și y sunt numere naturale.
   b) Ordonați crescător numerele: x, y, x^y și y^x.
31. Calculați $3a+2b$, unde:
   $a=\frac{3}{\sqrt{2}-1}+\frac{4}{2-\sqrt{2}}-\frac{5}{3-2\sqrt{2}}+\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$, $b=\frac{\cdot8}{2-\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}+1}-\frac{3}{2\sqrt{3}-3}-\frac{8}{3\sqrt{3}+5}$.
32. *a)* Arătați că numărul $a=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ se află în intervalul $(3;2\sqrt{3})$.

b) Determinați un număr irațional care aparține intervalului $(3;2\sqrt{3})$ și care este de forma $\sqrt{n}$, cu n număr natural.

33. Considerăm mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{5}{2x-3}\in\mathbb{Z}\right\} \quad \text{și} \quad B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,(3x+\sqrt{2})(3-x\sqrt{2})=7\right\}.$$

a) Arătați că 1 este element comun al mulțimilor A și B.
b) Calculați suma elementelor mulțimii A.
c) Scrieți elementele mulțimii B.

34. *a)* Se consideră numărul $a=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot25+3$. Arătați că $\sqrt{a}$ este irațional.
b) Arătați că numărul $b=\sqrt{5n+3}$ este irațional, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

35. Se consideră suma: $S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, n\in\mathbb{N}^*$.
a) Calculați S, dacă $n=24$;
b) Determinați numărul natural n, astfel încât $S=24$;
c) Determinați toate numerele naturale n, astfel încât S să fie un număr natural mai mic decât 24.

36. Cristi, Paul și Vlad au înălțimile de 1,65 m, 1,68 m și respectiv 1,71 m.
a) Care este înălțimea medie a celor trei băieți?
b) Arătați că înălțimea medie a celor trei băieți este mai mare decât $\sqrt{2}$ m.

37. Media geometrică a înălțimilor a doi copaci este $6\sqrt{3}$ m. Unul dintre copaci are înălțimea egală cu 9 m. Câți metri are celălalt copac în înălțime?

38. Andra și Raluca au fiecare sume de bani (în lei), proporționale cu numerele 4 și 5. Media geometrică a sumelor de bani a celor două fete este $24\sqrt{5}$.
a) Câți lei are fiecare ?
b) Mergând printr-un magazin, fetele vor să-și cumpere câte un tricou pe care scrie „99 lei – 55% reducere". Le ajung banii ?

39. Un teren de formă triunghiulară are laturile proporționale cu 2, 3, $\frac{9}{2}$.
a) Arătați că lungimea unei laturi este media geometrică a lungimilor celorlalte două.
b) Știind că terenul este împrejmuit cu un gard de lungime 16 m, determinați lungimile laturilor.

40. Un container plin cu marfă cântărește 155,5 kg. Umplut pe jumătate, containerul cântărește 86 kg. Câte kilograme cântărește containerul atunci când este gol?

Tema 1.7

Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori

Formule de calcul prescurtat

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

2a. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; **2b.** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

Alte formule de calcul (extindere):

3a. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; **3b.** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

4a. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; **4b.** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; **6.** $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$.

Exemple:

1. $(3+x)^2=3^2+2\cdot3\cdot x+x^2=9+6x+x^2$.
2. $(a-5)^2=a^2-2\cdot a\cdot5+5^2=a^2-10a+25$.
3. $(x-2y+3z)^2=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot x\cdot3z+2\cdot(-2y)\cdot3z=$
$=x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$.
4. $(3x-2)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot2+3\cdot(3x)\cdot2^2-2^3=27x^3-54x^2+36x-8$.

Metode de descompunere în factori

A descompune în factori o expresie algebrică înseamnă a scrie expresia respectivă sub formă de produs. Pentru a descompune o expresie în factori, se poate folosi proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de scădere (metoda factorului comun), se pot utiliza formulele de calcul prescurtat sau metode combinate.

Metoda factorului comun se bazează pe proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunarea/scăderea numerelor reale:

$$ax+ay=a(x+y) \quad \text{și} \quad ax-ay=a(x-y).$$

Exemple:

1. $3x-6=3(x-2)$; **2.** $ax+bx=x(a+b)$; **3.** $5x^2-10x=5x(x-2)$;
4. $x(2x+y)-7(2x+y)+(2x+y)^2=(2x+y)(x-7+2x+y)=(2x+y)(3x-7+y)$.

Utilizarea formulelor de calcul prescurtat (prin restrângerea formulei)

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
2. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; **3.** $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.
4. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. **5.** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
6. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$. **7.** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
8. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

Exemple:

1. $1+10x+25x^2=1^2+2\cdot1\cdot(5x)+(5x)^2=(1+5x)^2$;
2. $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot2x\cdot3y+(3y)^2=(2x-3y)^2$;
3. $4-b^2=2^2-b^2=(2-b)(2+b)$;
4. $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$.

Metode combinate de descompunere în factori

Exemple:

1. $2x+2y+ax+ay=(2x+2y)+(ax+ay)=2(x+y)+a(x+y)=(x+y)(2+a)$;

2. $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$;

3. Metoda I: $x^2+\underbrace{3x}_{x+2x}+2=x^2+x+2x+2=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$.

Metoda II: $x^2+3x+2=\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=(x+1)(x+2)$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $(x+3)^2-3$ este egal cu...

2. Rezultatul calculului $(x+2)^2-(x+1)(x-1)$ este...

3. Rezultatul calculului $\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este...

4. Rezultatul calculului $\left(2-\sqrt{3}\right)^2-(-4+5)$ este...

5. Știind că $x+y=1$, valoarea expresiei $(x+y)(x-y)+2y$ este egală cu...

6. Dacă $a+b=4$ și $a-b=2$, atunci a^2-b^2 este egal cu...

7. Un pătrat are latura de lungime $\sqrt{2}+1$ cm. Calculând aria pătratului se obține...

8. Rezultatul calculului $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ este...

9. Rezultatul calculului $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$ este...

10. Media geometrică a numerelor $x=5\sqrt{2}-7$ și $y=7+5\sqrt{2}$ este...

11. Media geometrică a numerelor $a=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$ și $b=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$ este...

12. Fie numerele naturale nenule: $x=a^2+a$, $y=a-1$ și $z=a^2-1$. Calculând $\frac{x\cdot y}{z}$ se obține...

13. Dacă $a^2-b^2=20$ și $a-b=4$, atunci $a+b$ este egal cu...

14. Dacă $x+\frac{1}{x}=7$, atunci valoarea expresiei $x^2+\frac{1}{x^2}$ este egală cu ...

15. După scoaterea factorului comun, expresia $2a-2b+2c$ este egală cu...

16. După scoaterea factorului comun, expresia $3x^3+6x^2-12x+24$ este egală cu...

17. Forma restrânsă a expresiei $4x^2+12x+9$ este...

18. Forma restrânsă a expresiei $9x^2-24xy+16y^2$ este...

19. Descompunând expresia x^4-81 în produs de trei factori se obține...

20. Descompunând expresia $16x^4-1$ în produs de trei factori se obține...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x-2)(x+2)-3x^2+14$, unde x număr real.

a) Arătați că $E(x)=x^2+6x+10$, oricare x număr real.

b) Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=-3$.

c) Arătați că $E(a)>0$, pentru orice valoare reală a numărului a.

22. Fie expresia $E(x)=x^2+x+5\sqrt{2}$. Calculați valoarea expresiei pentru $x=\sqrt{2}-3$.

23. Fie expresia $E(x)=(x+1)^2+2(x-7)+1$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)=(x-2)(x+6)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $E(-1)$.

c) Arătați că $E(x)+16\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

24. Fie expresia $E(x)=(x+5)^2+2(x+5)(x-4)+(x-4)^2$, cu $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)=(2x+1)^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $E(\sqrt{2})\cdot E(-\sqrt{2})$.

c) Calculați numărul real a pentru care $E(a)$ are cea mai mică valoare posibilă.

25. Se dă numărul $n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$, unde a, b și c sunt cifre nenule în baza zece.

a) Arătați că n este divizibil cu 37.

b) Arătați că n^2 este divizibil cu 333, oricare ar fi cifrele nenule a și b.

26. Fie numerele $a=\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ și $b=\sqrt{9+2\sqrt{14}}$.

a) Arătați că $(a-b)^2=8$.

b) Calculați $\left(a-b+2\sqrt{2}\right)^{100}$.

27. Se dau numerele $x=\sqrt{4-\sqrt{7}}$ și $y=\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

a) Calculați produsul $x\cdot y$.

b) Calculați $(x-y)^2$.

c) Arătați că $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ este număr întreg negativ.

28. Fie numerele $x=5\sqrt{2}-7$ și $y=5\sqrt{2}+7$.

a) Calculați media geometrică a numerelor x și y.

b) Demonstrați că $x<\frac{1}{14}$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}$ este număr natural.

29. Calculați valoarea numărului real $x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)^2-2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

30. *a)* Arătați că media geometrică a numerelor $x=2$ și $y=6$ este mai mică decât media lor aritmetică.

b) Arătați că, dacă $a,b \geq 0$, atunci $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

31. *a)* Arătați că numărul $\overline{x3} \cdot \overline{x5} + 1$ este pătrat perfect, oricare ar fi x cifră în baza zece diferită de zero.

b) Numerele $\overline{ab}$ scrise în baza zece, cu a și b diferite de zero, îndeplinesc condiția $\overline{ab} - \overline{ba} = a \cdot b - a$. Determinați toate numerele $\overline{ab}$ care îndeplinesc condiția dată.

32. *a)* Arătați că numărul $a = 9n^2 + 6n + 1$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Aflați valorile numerelor reale x și y pentru care expresia $E = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9y^2 + 6y + 10}$ are valoare minimă.

33. *a)* Arătați că numărul $p = y^2 + 4y + 5$ este pozitiv pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

b) Determinați cea mai mică valoare a numărului $A = \sqrt{x^2 - 10x + 29} + \sqrt{y^2 + 4y + 5}$, unde x și y sunt numere reale.

34. *a)* Fie x un număr real astfel încât $x^2 = 3$. Calculați $(x+1)(x-1)$.

b) Fie x un număr real astfel încât $x^8 = 5$. Calculați $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$.

35. Se consideră numărul $n = (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3x + 2) + 1$.

a) Calculați valorile lui n dacă $x = 2$ și $x = 3$.

b) Arătați că n este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural x.

36. Se știe că $a + b = 10$.

a) Calculați $(a+b)^2$.

b) Determinați valoarea expresiei $a^2 + 2ab + b^2 - 25$.

c) Determinați valoarea expresiei $(a-b)^2 + 4ab + 3(a+b)$.

37. Se știe că $x + y = 5$, iar $xy = 6$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculați $(x+y)^2$.

b) Arătați că $x^2 + y^2 = 13$.

c) Calculați valoarea numărului $a = (x-y)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

38. Se consideră expresia $E = a^2 + 4a + 6$.

a) Calculați valorile lui E dacă $a \in \{-1, 0, 2\}$.

b) Arătați că $E > 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

c) Descompuneți în factori expresia $E - 11$.

39. Se consideră numărul $A = a^2 + 10a + 26$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că A este pozitiv, oricare ar fi numărul real a.

b) Aflați valoarea lui a pentru care A are valoarea minimă și determinați acest minim.

40. Se consideră numărul $A = -4a^2 + 12a - 11$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că A este negativ, oricare ar fi numărul real a.

b) Aflați valoarea lui a pentru care A are valoarea maximă și determinați acest maxim.

41. Știind că $x + y = 3$ și $ax + ay + bx + by = \sqrt{27}$, calculați $a + b$.

42. Aflați numerele raționale a și b, dacă $a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{18} + \sqrt{2}$.

43. *a)* Arătați că $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = (x+2)^2 + (y-3)^2$.

b) Dacă $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$, determinați valorile numerelor reale x și y.

44. *a)* Arătați că $(x+2)^3 - x - 2 = (x+1)(x+2)(x+3)$.

b) Arătați că numărul $a = \left[(x+2)^3 - x - 2\right] : (x+2) + 1$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural x.

45. Un teren de formă triunghiulară are laturile exprimate, în hm, prin a, $a+2$, $2a-1$, unde $a \in \mathbb{N}^*$. Perimetrul terenului este 121 hm. Calculați lungimile laturilor terenului.

46. Un dreptunghi are laturile (exprimate în dm) de lungimi x, respectiv $x+2$, unde $x \in \mathbb{N}$. Dacă dreptunghiul are aria egală cu 15 dm^2, calculați perimetrul dreptunghiului.

47. Adi și Vlad au fiecare câte o sumă de bani. Adi are cu 20 lei mai mult decât Vlad. Dacă produsul sumelor celor doi băieți este 4800, aflați câți lei are fiecare.

48. Suma dintre vârsta Corinei și a Ralucăi este 16, iar diferența dintre pătratul vârstei Corinei și pătratul vârstei Ralucăi este 32.

a) Calculați diferența dintre vârsta Corinei și vârsta Ralucăi.

b) Câți ani au cele două fete?

49. Un pătrat are latura (exprimată în cm) de lungime x, unde $x \in \mathbb{N}$. Dacă se mărește latura pătratului cu 3 cm, se obține un nou pătrat cu aria de 0,81 dm^2. Aflați perimetrul pătratului inițial.

50. Un teren de formă pătratică are perimetrul egal cu $3a + 5$ decametri, unde $a \in \mathbb{N}$.

a) Calculați, în funcție de a, aria terenului.

b) Dacă terenul are o suprafață egală cu a unui dreptunghi cu dimensiunile de 16 dam, respectiv 4 dam, aflați a.

Tema 1.8

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Un raport în care termenii sunt expresii algebrice, se numeşte ***fracţie algebrică*** sau ***expresie algebrică raţională***.

O fracţie algebrică **nu** are valoarea definită pentru acele valori ale variabilelor care anulează numitorul.

Exemplu. Dacă $E(x)=x+2$ şi $G(x)=3x-6$, cu $G(x)\neq 0$, adică $x\neq 2$, atunci $F(x)=\frac{E(x)}{G(x)}=\frac{x+2}{3x-6}$, este o fracţie algebrică. Fracţia F ***este definită*** pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, numărul $F(a)=\frac{a+2}{3a-6}$ se numeşte ***valoarea fracţiei*** F în punctul a.

De exemplu $F(3)=\frac{3+2}{3\cdot 3-6}=\frac{5}{3}$.

Amplificarea. Prin amplificarea fracţiei algebrice $\frac{F(x)}{G(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia : $\frac{F(x)}{G(x)}\overset{E(x))}{=}\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$.

Simplificarea. Prin simplificarea fracţiei algebrice $\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia: $\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}\overset{(E(x)}{=}\frac{F(x)}{G(x)}$.

Observaţii.

1. Suma şi produsul a două fracţii algebrice sunt fracţii algebrice.

2. Dacă $F(x)=\frac{E(x)}{G(x)}$, cu $G(x)\neq 0$ şi $E(x)\neq 0$, atunci expresia $(F(x))^{-1}=\frac{G(x)}{E(x)}$ este fracţie algebrică.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Fie raportul $E(x)=\frac{x^2+2}{2x^2-3}$. Calculând $E(2)$ se obţine...

2. Fie raportul $F(x)=\frac{1-2x^2}{x^2+1}$. Calculând $F(\sqrt{2})$ se obţine...

3. Fie raportul $F(x)=\frac{x^2+4x+6}{x-1}$. Mulţimea valorilor lui x pentru care raportul nu are sens este...

4. Fie raportul $F(x)=\frac{x^3+2x^2+5}{x^2-9}$. Mulţimea valorilor lui x pentru care raportul are sens este...

5. Amplificând raportul $\frac{3x+1}{4x}$ cu $5x$, unde x este număr real diferit de zero, se obţine...

6. Amplificând raportul $\frac{2x-3}{x+1}$ cu $x-1$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, se obţine...

7. Simplificând raportul $\frac{6x^2y^3z^4}{2xy^2z^3}$ se obţine...

8. Simplificând raportul $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ prin $x-2$ se obţine...

9. Simplificând raportul $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ prin $x+3$ se obţine...

10. Simplificând raportul $\frac{x^3+x^2+x}{x+x+x}$ se obţine...

11. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$. După simplificare se obţine...

12. Fie expresia $F(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$. După simplificare se obţine...

13. Se consideră rapoartele $E(x)=\frac{x^2}{x+2}$ şi $F(x)=\frac{x+3}{x-2}$. Numitorul comun al celor două rapoarte este...

14. Calculând $\frac{x^3}{y^2}:\frac{x^2}{y^2}$, unde x şi y sunt numere reale diferite de zero, se obţine...

15. Calculând $\left(-\frac{4x^2}{9y^5}\right):\frac{2x^2y}{15xy^2}$, unde x şi y sunt numere reale diferite de zero, se obţine...

16. Fie expresia $E(x)=\frac{3-x}{2x}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Efectuând calculul $E(\sqrt{2})+E(-\sqrt{2})$ se obţine...

17. Calculând $\frac{x-3}{x+1}+\frac{2}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, se obţine rezultatul...

18. Calculând $\frac{4}{x-1}-\frac{3+x}{x-1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, se obţine rezultatul...

19. Efectuând calculul $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{3x}{x-3}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, se obţine rezultatul...

20. Efectuând calculul $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right):\frac{x^2+y^2}{2xy}$, unde $x,y\in\mathbb{R}^*$, se obţine rezultatul...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Fie expresia $E(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-4}$.

a) Pentru ce valori reale ale numărului x expresia $E(x)$ este bine definită?

b) Arătați că $E(x)=\frac{x^2-3}{x+2}$.

22. Considerăm raportul $F(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-3}$, pentru orice număr rațional x.

a) Calculați $F(3)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $F(x)=1$.

23. Fie expresia $E(x)=\frac{x-3}{x+3}\cdot\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right):(x+3)^{-2}$.

a) Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,E(x)\text{ are sens}\}$.

b) Arătați că expresia $E(x)$ are valoare constantă, oricare ar fi $x\in A$.

24. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x+1}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

b) Aflați numerele întregi x pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este număr întreg.

c) Rezolvați ecuația $E(x)=2$.

25. Se consideră fracția algebrică $F(x)=\frac{x^4+4x^2+3}{x^4+2x^2-3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

a) Arătați că $F(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

b) Determinați elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|E(x)|=1\}$.

26. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x^2-9}\right):\left(1+\frac{x^2+9}{x^2-9}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{5}{2x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$.

b) Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care $2a\cdot E(a)=a+6$.

27. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{x+1}{x^2-4}\right):\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+2}$, oricare ar fi x determinat la punctul ***a)***.

c) Calculați media geometrică a numerelor $a=E(7)$ și $b=E\left(\frac{1}{4}\right)$.

28. Fie raportul $F(x)=\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

a) Arătați că $F(x)=\frac{x+1}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{-2;0;2\}$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $2F(x)=x+2$.

c) Calculați suma $S=3\cdot F(3)+4\cdot F(4)+5\cdot F(5)+\ldots+101\cdot F(101)+102\cdot F(102)$.

29. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+5}-\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{5-x}\right):\frac{2x^2+x-6}{25-x^2}$, cu $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5,-2,\frac{3}{2},5\right\}$.

a) Arătați că $(x+2)(2x-3)=2x^2+x-6$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=\frac{x+2}{2x-3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5,-2,\frac{3}{2},5\right\}$.

c) Aflați valorile întregi ale lui a, pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

30. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x+2}{x-5}-\frac{14}{x^2-8x+15}\right):\frac{1}{x^2-9}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3;5\}$.

a) Arătați că $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $E(x)=(x+3)(x+4)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3;5\}$.

c) Arătați că $E(a)$ este număr par, pentru orice $a\in\mathbb{N}-\{3;5\}$.

31. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2+\frac{2x-6}{x+3}+1\right]\cdot\frac{x+3}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{2x}{x+3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$.

b) Verificați dacă există numere naturale n, diferite de 0, pentru care $\frac{1}{n}\cdot E(n)$ este număr întreg.

c) Determinați numerele întregi x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

32. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2}{x^4+x^3}:\frac{(2x+1)(x-1)-x(x-1)}{(x+1)(2x-2)}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{2}{x(x+1)}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;0\}$.

b) Aflați toate numerele întregi a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

33. Fie $E(x)=\frac{3x}{3x^2+2x-1}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)-\frac{7x-3x^2}{9x^2-1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

a) Arătați că $(3x-1)(x+1)=3x^2+2x-1$, pentru orice x real.

b) Arătați că $E(x)=\frac{4x}{1+3x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

34. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{4}{x-1}-\frac{12-4x}{x^2-1}-\frac{2x+6}{x^2+4x+3}\right):\frac{1}{x+1}$.

a) Arătați că $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}$.

b) Arătați că $E(x)=6$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-1;1\}$.

c) Determinați numerele întregi $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-3;-1\}$ pentru care $\frac{2a+6}{a^2+4a+3}$ este număr întreg.

35. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-3x}-\frac{1}{x^2+3x}\right):\frac{2x+8}{x^3-9x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4;-3;0;3\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+3}{x+4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4;-3;0;3\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $|x+4| \cdot |E(x)| < 3$.

c) Aflați numerele întregi a pentru care $2 \cdot E(a)$ reprezintă un număr întreg.

36. Fie expresia $E(x)=\frac{x+1}{2x+3}:\left(\frac{x+4}{5x-5}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2};-1;1\right\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{5}{2x+3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2};-1;1\right\}$.

b) Determinați valorile reale ale numărului x pentru care $|E(x)| \le 1$.

c) Determinați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a)$ este număr întreg.

37. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;2\}$.

b) Determinați numerele întregi a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația $2E(x)+E(0)=3$.

38. Fie expresia $E(x)=\frac{11x+4}{10x+4}+\frac{25x^2-4}{5x^2-3x-2}:\frac{10x-4}{x-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5};1;\frac{2}{5}\right\}$.

a) Arătați că $5x^2-3x-2=(5x+2)(x-1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=\frac{8x+3}{5x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5};1;\frac{2}{5}\right\}$.

c) Demonstrați că $\frac{8x+3}{5x+2}$ este o fracție ireductibilă, pentru orice x număr natural.

39. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+x}-\frac{x+2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{x}{x^2-x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0;1\}$.

a) Simplificați raportul $\frac{x}{x^2-x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

b) Arătați că $x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x-1)(x+1)$, pentru orice x real.

c) Arătați că $E(x)=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0;1\}$.

d) Calculați valoarea sumei $S=1+E(2)+E(2^2)+\ldots+E(2^{40})$.

40. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}+\frac{7}{1-x^2}\right)\cdot(x^2-1)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;-1;1\}$.

a) Demonstrați că $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$, pentru orice x real.

b) Arătați că $E(x)=(x+2)(x-2)$, oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;-1;1\}$.

c) Calculați valoarea numărului real a astfel încât $E(a)=a-4$.

41. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+2}{x^2+4x+4}-\frac{x}{x+2}\right):\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1;2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{4-2x}{x+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1;2\}$.

b) Calculați $E(\sqrt{5}) \cdot E(-\sqrt{5})$.

c) Rezolvați ecuația $E(x)=1$.

42. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{x-3}{x}-1+\frac{x}{x-3}\right):\frac{2x^2-6x+18}{2x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;4\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x-3}$, oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;4\}$.

b) Determinați valorile naturale ale numărului x pentru care $E(x)<0$.

c) Determinați valorile naturale ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

43. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3x+6}{x^2+x-2}-\frac{2}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}\right):\frac{1}{x-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;1\}$.

a) Arătați că $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=5$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;1\}$.

c) Arătați că numărul $N=1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{122}$ este divizibil cu 31.

44. Se consideră raportul $F(x)=\frac{(x^2+3x+4)^2-3(x^2+3x+4)+2}{(x^2-1)(x^2+3x+3)(x+2)}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care raportul $F(x)$ are sens.

b) Arătați că $(x^2+3x+4)^2-3(x^2+3x+4)+2=(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Simplificați $F(x)$.

d) Arătați că $F(x)>0$, pentru orice x număr natural mai mare decât 1.

45. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{4x+12}{x^2+2x-3}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x+4}{x^2-1}\right):\frac{3}{x^2-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;-1;1\}$.

a) Arătați că $\frac{4x+12}{x^2+2x-3}=\frac{4}{x-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$.

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Calculați valoarea produsului $p=E(2) \cdot E(3) \cdot \ldots \cdot E(100)$.

46. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{-5x-1}{x^2+4x+3}+\frac{2x}{x+1}+\frac{4}{x+3}\right):\frac{2x+3}{(x^2+3x)(x^2+3x+2)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3;-2;-\frac{3}{2};-1;0\right\}$.

a) Calculați suma valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x)$ nu are sens.

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Arătați că $E(n)$ se divide cu 6, oricare ar fi numărul natural n.

47. Se consideră expresia $E(x)=1+\frac{3}{x^2+4x+7}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)\in(1;2]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați partea întreagă a lui $E(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

48. Se consideră expresia $E(x)=6+\frac{2}{4x^2+4x+3}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)\in(6;7]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați partea întreagă a lui $E(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

49. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+1}\right):\frac{6}{x(x+1)(x-3)}$.

a) Calculați produsul valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu are sens.

b) Arătați că numărul $a=x^2+4E(x)+16$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}-\{0;3\}$.

c) Stabiliți dacă există $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{2}\cdot E(x)\in\mathbb{Q}$.

50. Se consideră suma $S=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+49)(x+50)}$, unde $x\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $S=\frac{50}{x(x+50)}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $|S\cdot x|=25$.

Tema 1.9

Funcții

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x\in A$ i se asociază un singur element $y=f(x)\in B$.

Prin $f:A\to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numește *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y=f(x)$ se numește *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x\in A$, elementul $f(x)\in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției* f în punctul x.

Graficul funcției. Fie $f:A\to B$ o funcție. Mulțimea $G_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in A\}$ se numește *graficul funcției f*. Avem și $G_f=\{(x,y)\,|\,x\in A, y=f(x)\}\subset A\times B$.

Funcția numerică este o funcție al cărei domeniu de definiție și domeniu de valori ale unei funcții sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

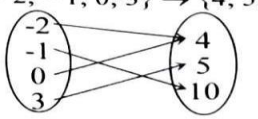
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f:A\to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x,y)\in G_f$ îi putem asocia un punct $M(x,y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x,y)$, cu $(x,y)\in G_f$ se numește *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

Funcții egale. Două funcții $f:A\to B$ și $g:C\to D$ sunt *egale* dacă $A=C$, $B=D$ și $f(x)=g(x)$, oricare ar fi $x\in A$. Notăm: $f=g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1. Printr-o ***diagramă***.

$f:\{-2;-1;0;3\}\to\{4;5;10\}$,



2. Printr-un ***tabel***.

$g:\{-1;0;2;5\}\to\{1;2;3\}$.

x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3. Prin una sau mai multe formule analitice:

$h:\{0,2,4\}\to\{0,4,16\}$, $h(x)=x^2$; $\quad u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=\begin{cases}3x-5, \text{ dacă } x\le 1\\ 2x+3, \text{ dacă } x>1\end{cases}$

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

Definiție. Funcția de tipul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, se numește *funcție liniară*. Dacă $a\neq 0$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, se numește *funcție de gradul I*.

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții liniare este o *dreaptă*.

1. Dacă $a\neq 0$ și $b=0$, funcția liniară $f(x)=ax$ are ca reprezentare geometrică o dreaptă care conține originea sistemului de coordonate.

2. Dacă $a=b=0$, funcția liniară $f(x)=0$ este *funcția constantă nulă*, a cărei reprezentare geometrică este axa Ox.
3. Dacă $a=0$ și $b\neq 0$, funcția liniară $f(x)=b$ este o *funcție constantă nenulă*, a cărei reprezentare geometrică este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Funcții liniare egale. Funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$ sunt egale dacă și numai dacă $a=c$ și $b=d$.

Intersecțiile graficului unei funcții de gradul întâi cu axele de coordonate

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Atunci :

$$\mathcal{G}_f\cap Ox=A\left(-\frac{b}{a},0\right) \qquad \text{și} \qquad \mathcal{G}_f\cap Oy=B(0,b).$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Valoarea funcției pentru $x=2$ este egală cu ... .
2. Valoarea produsului $f(-2)\cdot f(3)$ este egală cu ..., unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$, atunci valoarea de adevăr propoziției "Punctul $A(0;2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f" este ... .
4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-3$. Dacă punctul $B(a;8)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului a este egală cu ... .
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-7$. Dacă punctul $C(4;b)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului b este egală cu ... .
6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Soluția ecuației $3\cdot f(x)=15$ este egală cu ... .
7. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este punctul $A(...;...)$.
8. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+4$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox este punctul $B(...;...)$.
9. Fie $f:\{1;2\}\to\{a;b\}$, $f(x)=x+1$. Valoarea sumei $a+b$ este egală cu ... .
10. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$ și $D(x;x)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărul x este egală cu ... .
11. Dacă punctul $C(2;3)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-a$, atunci valoarea reală a numărului a este egală cu ... .
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+8$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu abscisa egală cu 3 are coordonatele $(...;...)$.
13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-x$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu ordonata egală cu 7 are coordonatele $(...;...)$.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu abscisa egală cu dublul ordonatei are coordonatele $(...;...)$.
15. Dacă $f:\{a,b\}\to\{4,6\}$, $f(x)=x-1$, valoarea produsului $a\cdot b$ este egală cu ... .
16. Se dă funcția $f:\{-2;-1;0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Rezultatul calculului $f(-2)+f(-1)-f(0)$ este egal cu ... .
17. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt{3}-2)x-5$. Valoarea funcției pentru $x=\sqrt{3}+2$ este egală cu ... .
18. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x+2m$. Dacă punctul $A(2;2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului m este egală cu ... .
19. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-8$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa ordonatelor este punctul $C(...;...)$.
20. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9-3x$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa absciselor este egală cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-3$.
a) Determinați numerele reale m astfel încât punctul $A(m;1)$ să aparțină reprezentării grafice a funcției f.
b) Pentru $m=-2$, calculați distanța de la originea axelor la reprezentarea grafică a funcției f.
22. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$, cu m și n numere reale. Punctele $A(2;m)$ și $B(3;6)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.
a) Arătați că $m=3$ și $n=-3$.
b) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.
a) Demonstrați că are loc egalitatea $f(5)+f(9)=2\cdot f(7)$
b) Determinați funcția f, știind că punctele $A(0;\sqrt{2})$ și $B(\sqrt{3};4\sqrt{2})$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.
24. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-3)x+b+1$, unde a și b sunt numere reale.
a) Determinați numerele a și b știind că punctele $A(-2;2)$ și $B(3;2)$ aparțin graficului funcției.
b) Pentru $a=3$ și $b=2$, reprezentați grafic funcția obținută.
25. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$.
a) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g.
26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-\sqrt{3})\cdot x-\sqrt{3}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, inecuația $f(x)+1\geq 0$.

b) Determinați numerele raționale a și b pentru care punctul $M\left(a+1;\ b\sqrt{3}\right)$ aparține graficului funcției f.

27. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+6$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot f(x)-f(1)=f(2)$.

b) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați suma $S=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(25)$.

29. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.

a) Comparați numerele $f\left(\sqrt{2}-1\right)$ și $f\left(\sqrt{2}\right)$.

b) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

30. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=0,5\cdot x+1$.

a) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe perpendiculare xOy

b) Demonstrați că punctul $O(0;0)$ este egal depărtat de reprezentările grafice ale funcțiilor f și g.

31. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

32. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+3$.

a) Determinați valoarea reală a numărului a știind că punctul $A(2a,3a)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

b) Calculați aria triunghiului format de axa ordonatelor, axa absciselor și reprezentarea grafică a funcției f.

33. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x+3a+4$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile numărului real a pentru care punctul $A(a;0)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

b) Pentru $a=2$, reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

34. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{4}x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați valoarea numărului real m știind că punctul $A(m;2)$ aparține graficului funcției f.

35. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(1-\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, inecuația $f(x)-1\geq 0$.

b) Arătați că punctul $A(1,1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

36. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Punctele $A(1;2)$ și $B(2;3)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției f.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați valorile numerelor reale a și b.

37. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați valorile numărului real a pentru care punctul $A(2|a|;7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

38. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Rezolvați ecuația $5\cdot f(x+1)=2x+11$.

39. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați distanța de la punctul $A(1;0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

40. Fie funcția $f:\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați distanța dintre cele două puncte ale reprezentării grafice a funcției f.

41. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

a) Pentru $a=1$ și $b=0$, reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați valorile reale ale numerelor a și b, știind că punctul $A(0;4)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției f, iar distanța de la originea O a sistemului de axe perpendiculare xOy la reprezentarea grafică a funcției f este egală cu $2\sqrt{3}$.

42. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Fie punctele $A(0;f(0))$ și $B(2;f(2))$. Determinați coordonatele punctului C situat pe axa Ox astfel încât $AC=BC$.

43. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați $S=f(-1)+f(1)+f(3)+\ldots+f(55)$.

44. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Dacă punctul A' este simetricul punctului $A(2,f(2))$ față de origine, determinați lungimea segmentului $[AA']$.

45. Fie funcția $f:\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați distanța dintre cele două puncte ale reprezentării grafice a funcției f.

46. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

a) Demonstrați că punctele $A(1;3)$, $B(2;4)$ și $C(5;7)$ sunt coliniare.

b) Calculați distanța de la originea O a sistemului de axe perpendiculare xOy la reprezentarea grafică a funcției f.

47. Se dau punctele $A(1;3)$ și $B(2;4)$.

a) Dacă punctele A și B aparțin reprezentării grafice a funcției f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, atunci determinați numerele reale a și b.

b) Pentru $a=2$ și $b=2$, reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

48. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.

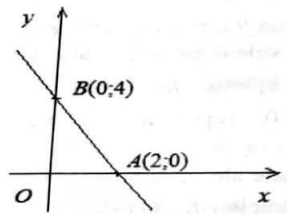
a) Verificați dacă punctele $A(3;6)$, $B(4;10)$ și $C(1;1)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.

b) Determinați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate.

49. Reprezentați grafic într-un sistem de axe perpendiculare xOy rezultatele obținute de un grup de elevi la un test. Rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

50. Reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ este prezentată mai jos.



a) Determinați numerele reale a și b.

b) Calculați perimetrul triunghiului AOB.

Tema 1.10

Ecuații, inecuații, sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, al inecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

Ecuații de gradul I cu o necunoscută și ecuații echivalente

O ecuație de forma $ax+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienți* (a este coeficientul necunoscutei, iar b se numește și termen liber), iar x se numește *necunoscută* sau *variabilă*.

Se numește *soluție* a ecuației $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$, un număr $x_0\in\mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0+b=0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor* ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x\in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M=\mathbb{R}$.

Exemple.

1. Ecuația $2x-6=0$ are soluția $x_0=3$, deoarece $2\cdot3-6=0$ și $3\in\mathbb{R}$.
2. Ecuația $3x+9=0$, $x\in\mathbb{N}$, nu are soluții, deoarece propoziția $3x_0+9=0$ este adevărată doar dacă $x_0=-3$, iar $-3\notin\mathbb{N}$. Se observă că ecuația $3x+9=0$, $x\in\mathbb{Q}$, are soluția $x_0=-3$.

Pentru a rezolva o ecuație, adică pentru a afla soluțiile sale, putem folosi proprietățile relației de egalitate, obținând egalități echivalente. În general, vom încerca să ajungem la o egalitate de forma $x=a$, care este cea mai simplă ecuație, și care are doar soluția $x_0=a$.

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții. În mod evident, două ecuații echivalente au aceeași mulțime a soluțiilor.

Pentru a obține ecuații echivalente cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:

- trecem termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- adunăm / scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim / împărțim ambii membri ai ecuației cu un factor nenul.

Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

Un *sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute* are forma

$$(S)\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases},\quad \text{unde } a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R} \text{ și } x\in\mathbb{R}.$$

O pereche de numere reale (x_0,y_0) se numește *soluție a sistemului* (S), dacă ea este soluție pentru fiecare ecuație a sistemului. *A rezolva* sistemul (S), înseamnă a determina mulțimea S a soluțiilor sistemului.

Două sisteme se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.

Metodele uzuale de rezolvare a sistemelor de forma (S) sunt: metoda reducerii, metoda *substituției* și metoda *grafică*. Aceasta din urmă conduce numai la estimarea soluțiilor.

Metoda substituției presupune exprimarea uneia dintre necunoscute în funcție de cealaltă dintr-o ecuație și înlocuirea (substituirea ei) în cealaltă ecuație. În acest fel se formează o ecuație de gradul I cu o singură necunoscută, care se rezolvă.

Exemplu: $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ 2x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ 2(3y+2)-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$.

Metoda reducerii constă în formarea unui sistem echivalent cu cel dat prin înmulțirea uneia sau a ambelor ecuații cu numere reale nenule astfel încât coeficienții unei necunoscute să fie numere opuse, după care se adună ecuațiile membru cu membru, obținându-se o ecuație de gradul I cu o necunoscută care se rezolvă.

Exemplu: $\begin{cases} 3x-4y=1 \ \ |\cdot 3 \\ 2x+3y=12 \ |\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-12y=3 \\ 8x+12y=48 \end{cases}$.

Adunând cele două ecuații se obține $17x=51 \Leftrightarrow x=3$. Din prima ecuație a sistemului inițial obținem $9-4y=1$, de unde $y=2$.

Inecuații de gradul I. Fie $E(x)=ax+b$, unde $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *O inecuație de gradul I cu necunoscuta* $x \in \mathbb{R}$ este o propoziție cu variabilă $x \in \mathbb{R}$ de forma

$E(x) \leq 0$ sau $E(x) \geq 0$ sau $E(x) < 0$ sau $E(x) > 0$.

Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $E(\alpha) \leq 0$ se numește *soluție* a inecuației $E(x) \leq 0$.

La fel, un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $E(\alpha) > 0$ este o *soluție* a inecuației $E(x) > 0$.

A rezolva o inecuație de forma $E(x) \leq 0$, înseamnă *a determina mulțimea* $S=\{\alpha \in \mathbb{R} \mid E(\alpha) \leq 0\}$, numită *mulțimea de soluții*. De regulă, mulțimile de soluții ale inecuațiilor pentru care $E(x)=ax+b$ sunt intervale.

Două *inecuații* sunt *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru rezolvarea inecuațiilor se folosesc proprietățile operațiilor cu numere reale în raport cu relația de inegalitate.

Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută este ecuația de forma

$ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. (1)

Numerele *a, b, c* se numesc *coeficienții* ecuației, iar numărul real $\Delta=b^2-4ac$ se numește *discriminantul* ecuației (1).

Are loc egalitatea $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Notând cu *S mulțimea de soluții reale* ale ecuației (1), atunci:

- dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale: $S=\varnothing$;
- dacă $\Delta = 0$, ecuația are două soluții reale egale: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ și $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;
- dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale distincte: $S=\{x_1,x_2\}$, unde $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Dacă ecuația (1) are soluțiile reale x_1 și x_2, atunci

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/sistemelor de ecuații

Pentru rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații, se parcurg, în general, următoarele etape:

1. Stabilirea datelor cunoscute și a celor necunoscute.
2. Notarea uneia sau a două dintre datele necunoscute cu câte o literă.
3. Scrierea unei ecuații sau a unui sistem, numit modelul matematic al rezolvării problemei, folosind legătura dintre datele problemei.
4. Rezolvarea ecuației/sistemului (și proba rezolvării ecuației/sistemului).
5. Analiza soluției și formularea răspunsului la cerințele problemei (și proba rezolvării problemei).

Exemplu: Mama are 31 de ani, iar fiul are 7 ani. Peste câți ani vârsta fiului va fi de trei ori mai mică decât vârsta mamei?

Rezolvarea se face parcurgând etapele de mai sus.

1. Se cunosc vârstele din prezent ale mamei (31 ani) și fiului (7ani) și nu știm peste câți ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului.
2. Notăm cu x numărul de ani peste care vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului.
3. Peste x ani mama va avea $31+x$ ani, iar fiul va avea $7+x$ ani, deci are loc egalitatea: $31+x=3(7+x)$. Această ecuație este modelul matematic al problemei.
4. Rezolvăm ecuația: $31+x=3(7+x) \Leftrightarrow 31+x=21+3x \Leftrightarrow 10=2x \Leftrightarrow x=5$.
   Proba: $31+5=3(7+5) \Leftrightarrow 36=36$ (A), deci $S=\{5\}$.
5. Răspunsul la cerința problemei. Peste 5 ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului. Proba: mama va avea $31+5=36$ ani, iar fiul $7+5=12$, iar $36:12=3$.

Probleme propuse

1. Soluția ecuației $2x+0,5=\frac{3}{2}$ este numărul rațional ... .
2. Rezolvând ecuația $3x-\frac{2}{5}=2,6$, obținem soluția ... .
3. Dacă $\frac{x}{4}=3,25$, atunci x este egal cu ... .
4. Soluția ecuației $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=1$ este numărul natural ... .
5. Se știe că $y\sqrt{2}+y\sqrt{3}=3$. Atunci y este egal cu ... .
6. Soluția pozitivă a ecuației $x^2-3x=4$ este egală cu ... .
7. Suma soluțiilor ecuației $x^2+4x+3=0$ este egală cu ... .
8. Produsul soluțiilor ecuației $x^2-5x+4=0$ este egal cu ... .
9. Dacă -1 este soluție a ecuației $2x^2+ax+3=0$, atunci valoarea numărului a este egală cu ... .

10. Soluția număr întreg a ecuației $5x^2+7x+2=0$ este egală cu ... .

11. Soluția număr natural a ecuației $3x^2-4x-4=0$ este egală cu ... .

12. Soluțiile ecuației $x^2+2x-1=0$ sunt ... și ... .

13. Soluțiile ecuației $-x^2+3x-1=0$ sunt ... și ... .

14. Soluțiile ecuației $-4x^2+7x-3=0$ sunt ... și ... .

15. Soluția negativă a ecuației $y^2=13$ este egală cu ... .

16. Rezolvând ecuația $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=1$, obținem soluția ... .

17. Soluția naturală a inecuației $3x-1<2$ este egală cu ... .

18. Soluția în $\mathbb{Z}$ a inecuației $3(x+1)<-18$ este ... .

19. Rezolvând în $\mathbb{Z}$ inecuația $2(x+5)+3\leq -9$, obținem soluția ... .

20. Numerele întregi care verifică $|x+1|<3$ sunt ... .

21. Soluția inecuației $|2x+3|\leq 0$ este ... .

22. Numerele reale care verifică $|4x-5|\leq 3$ sunt ... .

23. Soluția inecuației $x^2-6x+9\leq 0$ este ... .

24. Rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuația $y^2+10y>-25$, obținem soluția ... .

25. Soluția reală a inecuației $|3x-2|>4$ este ... .

26. Soluția întreagă a inecuației $\frac{x-2}{3-x}\geq 0$ este ... .

27. Soluția naturală a inecuației $x^2+x-2<0$ este ... .

28. Soluția sistemului $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ este ... .

29. Soluția sistemului $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$ este ... .

30. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+y=0 \end{cases}$, obținem soluția ... .

31. Soluția sistemului $\begin{cases} 13x-7y=6 \\ 7x+13y=20 \end{cases}$ este ... .

32. Numerele reale care verifică sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ \sqrt{8}x-\sqrt{27}y=-5 \end{cases}$ sunt ... .

33. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{14}{x}-\frac{6}{y}=6 \\ \frac{12}{x}+\frac{18}{y}=9 \end{cases}$ este reprezentată de ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

34. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $\frac{4}{3}x+1=x+5,(3)$.

35. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $\frac{1}{7}[x-0,(23)]=\frac{5}{14}$.

36. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $|2x+3|=17$.

37. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\frac{x+6}{7}+...+\frac{x+99}{100}=96$.

38. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x+1)^2+(3x-1)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$.

39. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x-2}{2x+1}=\frac{3x-2}{6x+5}$.

40. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $y^2-6y+8=0$.

41. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuația $(y-2)^2+(y+1)^2=17$.

42. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, știind că $\frac{x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x+1}=\frac{5}{2}$.

43. Se dă ecuația $4x^2+bx+c=0, b,c\in\mathbb{R}$.

a) Dacă 1 este soluție a ecuației date, atunci determinați suma numerelor b și c.

b) Pentru $b=7$ și $c=3$ rezolvați ecuația.

c) Dacă $b=4$ și o soluție a ecuației este $-\frac{1}{2}$, atunci determinați valoarea numărului c.

44. Se dau ecuațiile $x^2+4x+a=0$ și $2x+4=0$, $a\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului a știind că cele două ecuații sunt echivalente.

45. Aria unui dreptunghi este egală cu 20 m^2. Determinați dimensiunile dreptunghiului, știind că lungimea este cu 1 m mai mare decât lățimea.

46. Rezolvați ecuația $(x+2)^2-3(x-1)-9=0$.

47. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$.

a) Știind că punctul $A(p,p^2)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției f, atunci determinați valoarea numărului p.

b) Rezolvați ecuația $f(x)\cdot f(x+1)=28$.

48. Dacă mulțimea soluțiilor ecuației $ax^2+bx+3=0$ este egală cu $\left\{-\frac{3}{2},-1\right\}$, atunci determinați numerele reale a și b.

49. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+4=0$, atunci arătați că $x^2-5x+4=(x-x_1)(x-x_2)$.

50. Determinați valoarea numărului real a știind că ecuația $x^2+ax+9=0$ are două soluții egale.

51. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $7x-3(x-1)<5(x-2)+3(x-3)$.

52. Să se determine toate numerele întregi ce verifică $|3x-7|<5$.

53. Determinați toate numerele naturale x știind că $(x+1)^2+(2x-3)^2 \le (2x-4)^2+(x-6)^2$.

54. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $|x-1|+|2-2x|<6$.

55. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația $\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}<5$.

56. Determinați toate numerele reale care verifică inecuația $\frac{x+3}{x^2+1} \ge 0$.

57. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x+3}{x-1}<1$.

58. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că $\frac{x+2}{x-3}-\frac{3-x}{x+2} \ge -2$.

59. Se consideră sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3x-11y=11 \\ 17x-5y=5 \end{cases}$. Să se determine $(x+y)^{2013}$.

60. Se dă sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3x+6y=12 \\ -2x-4y=-8 \end{cases}$.

a) Să se determine trei perechi de numere reale care să reprezinte soluții pentru sistemul de mai sus.

b) Să se găsească soluția care verifică $x+y=0$.

61. Numerele reale x și y verifică ecuațiile: $\begin{cases} 13x+3y=10 \\ 3x-13y=-10 \end{cases}$. Calculați $(5y-8x)^{2012}$.

62. Fie sistemul de ecuații: $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{7}{x}-\frac{3}{y}=11 \end{cases}$.

Să se demonstreze că sistemul are soluție unică și să determine respectiva soluție.

63. Fie sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3x^2+4y^2=19 \\ 17x^2-3y^2=5 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că sistemul de mai sus nu are soluție unică.

b) Să se determine soluția reprezentată prin două numere pozitive.

64. Diferența a două numere naturale este 226. Dacă la scăzător adunăm 2, atunci el devine de 8 ori mai mic decât descăzutul. Determinați cele două numere.

65. Suma a două numere naturale este de 6 ori mai mare decât diferența lor. Dacă din numărul mai mic se scade 11 se obține un număr de doua ori mai mic decât suma dintre numărul mai mare și 8. Aflați cele două numere.

66. Calculați diferența dintre numărul care împărțit la 43 dă câtul 51 și restul 29 și numărul care împărțit la 51 dă câtul 29 și restul 43.

67. Ce cantitate de fructe se află într-un depozit dacă după ce mai sunt aduse 432 kg și apoi distribuite la 5 magazine câte 72 kg și la 8 magazine câte 46 kg au rămas în depozit 377 kg?

68. În biblioteca unui elev, pe unul dintre rafturi se află 60 de cărți. Pe fiecare dintre celelalte rafturi se află câte 50 de cărți. Dacă elevul ar așeza câte 60 de cărți pe un raft, atunci ar rămâne 4 rafturi fără nici o carte.

a) Câte rafturi are biblioteca?

b) Câte cărți sunt în biblioteca elevului?

69. Într-o cantină sunt mese cu patru picioare și mese cu 3 picioare, în total 17 mese. Știind că toate mesele au la un loc 63 de picioare, aflați câte mese cu câte trei picioare sunt.

70. Diferența a două numere este 108. Determinați numerele știind că unul dintre ele este cu 48 mai mare decât de 11 ori celălalt număr.

71. Cantitatea de 552 kg de struguri s-a dus la un magazin în lăzi mici de câte 8 kg fiecare și în lăzi mari de câte 12 kg fiecare. Știind că numărul lăzilor mari este cu 6 mai mare decât numărul lăzilor mici, determinați câte lăzi s-au adus din fiecare fel.

72. Un elev își propune să citească 375 de pagini dintr-o carte și constată următoarele:

a) dacă în fiecare zi ar citi cu 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă, ar termina de citit ce și-a propus în 5 zile. Câte pagini trebuie să citească în prima zi?

b) dacă în fiecare zi ar citi un număr de pagini egal cu dublul celor citite în ziua precedentă ar termina de citit ce și-a propus în 4 zile. Câte pagini ar trebui să citească în prima zi?

73. Fiul, tatăl si bunicul au suma vârstelor egală cu 103 ani. Peste trei ani, vârsta bunicului va fi de două ori mai mare decât vârsta tatălui, iar vârsta tatălui va fi de cinci ori mai mare decât vârsta fiului. Aflați ce vârstă are tatăl în prezent.

74. Tatăl și fiul au împreună 48 de ani. Tatăl este de trei ori mai în vârstă decât fiul. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de două ori mai mare decât vârsta fiului?

75. În trei depozite se află 600 tone de grâu. Dacă din primul depozit se transferă 20 tone în al doilea și 25 tone în al treilea, atunci în cele trei depozite se află cantități egale de grâu.

a) Cu câte tone de grâu este mai mare cantitatea de grâu din al doilea depozit față de cantitatea din al treilea depozit?

b) Aflați câte tone de grâu se află în fiecare depozit.

76. Mama este cu 18 de ani mai în vârstă decât fiica, iar peste 3 ani mama va fi de 3 ori mai în vârstă decât fiica sa.

a) Câți ani are în prezent fiica?

b) În urmă cu câți ani vârsta mamei era de 7 ori mai mare decât vârsta fiicei?

Geometrie
Clasele VI-VIII

2

Tema 2.1. Unghiuri. Triunghiuri
(clasa a VI-a)

Tema 2.2. Patrulatere
(clasa a VII-a)

Tema 2.3. Asemănare
(clasa a VII-a)

Tema 2.4. Relaţii metrice
(clasa a VII-a)

Tema 2.5. Cercul
(clasa a VII-a)

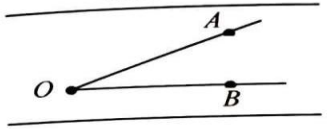
Tema 2.6. Incidenţă, paralelism şi perpendicularitate în spaţiu
(clasa a VIII-a)

Tema 2.7. Corpuri geometrice. Arii şi volume
(clasa a VIII-a)

Tema 2.1
Unghiuri. Triunghiuri

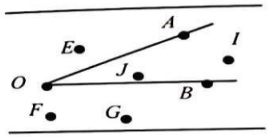
1. Unghiuri

Definiţie. Reuniunea a două semidrepte închise, cu aceeaşi origine, se numeşte unghi: $[OA \cup [OB = \sphericalangle AOB$.

desen	citire	notaţie
	Unghiul AOB; sau unghiul BOA; sau unghiul O.	$\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$; $\sphericalangle O$.

Elementele unui unghi. Originea comună a celor două semidrepte se numeşte *vârful unghiului*. Cele două semidrepte închise se numesc *laturile unghiului*.

Poziţiile relative ale unui punct faţă de un unghi

desen	citire	notaţie
	A, O şi B aparţin unghiului $\sphericalangle AOB$; I şi J se află în interiorul $\sphericalangle AOB$; E, F şi G se află în exteriorul $\sphericalangle AOB$;	$A,O,B \in \sphericalangle AOB$ $I,J \in Int\sphericalangle AOB$ $E,F,G \in Ext\sphericalangle AOB$

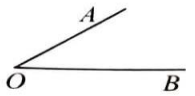
Tipuri de unghiuri.
Unghiul nul este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte identice.
Unghiul alungit este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse.

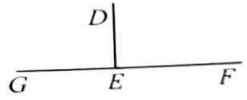
Unghi impropriu. Unghi propriu. Unghiul nul şi unghiul alungit se numesc *unghiuri improprii*. Unghiul care nu este, nici nul şi nici alungit, se numeşte *unghi propriu*.

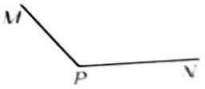
Exemplu: 

Unghiurile $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle ACB$ sunt unghiuri nule, iar $\sphericalangle ABC$ este unghi alungit.

Clasificarea unghiurilor proprii
Unghiul ascuţit este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $0°$ şi $90°$.
Unghiul drept este unghiul a cărui măsură este egală cu $90°$.
Unghiul obtuz este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $90°$ şi $180°$.


unghiul ascuţit $\widehat{AOB}$


unghiul drept $\widehat{DEF}$


unghiul obtuz $\widehat{MPN}$

Observaţie. Orice unghi nul are măsura de $0°$, iar orice unghi alungit are măsura de $180°$.

Unghiuri congruente. Două unghiuri care au aceeaşi măsură se numesc *unghiuri congruente*.

Unghiuri adiacente. Două unghiuri proprii care au vârf comun, o latură comună, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte și de alta a laturii comune se numesc *unghiuri adiacente.*

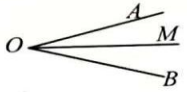


Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente, atunci O este *vârful comun* al unghiurilor, $[OC$ este *latura comună*, iar $[OA$ și $[OB$ sunt *laturile situate de o parte și de alta a laturii comune.*

Observații. 1. $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \text{Int}(\sphericalangle BOC) = \varnothing$.

2. Un unghi impropriu nu poate fi adiacent cu nici un alt unghi.

Bisectoarea unui unghi propriu. Semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente, se numește *bisectoare.*



$$\left.\begin{array}{l}[OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB) \\ \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM\end{array}\right| \Leftrightarrow [OM \text{ este bisectoarea unghiului } \sphericalangle AOB.$$

Unghiuri complementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 90° se numesc unghiuri *complementare.* Fiecare dintre cele două unghiuri este *complementul* celuilalt.

Proprietățile unghiurilor complementare

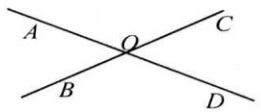
a. Complementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $90° - x$.
b. Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura de 45°.
c. Unghiurile congruente au complemente congruente.
d. Unghiurile care au același complement sunt congruente.

Unghiuri suplementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 180° se numesc *unghiuri suplementare.* Fiecare dintre cele două unghiuri este *suplementul* celuilalt.

Proprietățile unghiurilor suplementare

a. Suplementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $180° - x$.
b. Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare este un unghi drept.
c. Unghiurile congruente au suplemente congruente.
d. Unghiurile care au același suplement sunt congruente.
e. Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

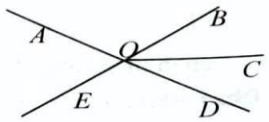
Unghiuri opuse la vârf. Două unghiuri proprii cu laturile unuia semidrepte opuse cu laturile celuilalt se numesc *unghiuri opuse la vârf.*



$$\frac{\begin{array}{c}[OA \text{ și } [OD \text{ sunt semidrepte opuse} \\ [OB \text{ și } [OC \text{ sunt semidrepte opuse}\end{array}}{\begin{array}{l}\sphericalangle AOB \text{ și } \sphericalangle COD \text{ sunt unghiuri opuse la vârf} \\ \sphericalangle AOC \text{ și } \sphericalangle BOD \text{ sunt unghiuri opuse la vârf}\end{array}}$$

Teoremă. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

Unghiuri în jurul unui punct. Trei sau mai multe unghiuri care au vârful comun, au interioarele disjuncte două câte două și au proprietatea că orice punct al planului se află pe o latură sau în interiorul unuia dintre unghiuri, se numesc *unghiuri în jurul unui punct.*

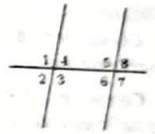


În figură, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ și $\sphericalangle EOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor din jurul unui punct este egală cu 360°.

Unghiuri determinate de o secantă și două drepte paralele

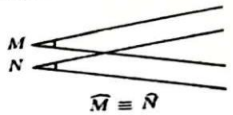
Teoremă. Două drepte paralele, intersectate de o secantă, formează perechi de unghiuri:



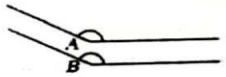
a. alterne interne congruente: $\hat{4} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{5}$
b. alterne externe congruente: $\hat{1} \equiv \hat{7}$, $\hat{2} \equiv \hat{8}$
c. corespondente congruente: $\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$
d. interne de aceeași parte a secantei, suplementare: $m(\hat{4}) + m(\hat{5}) = m(\hat{3}) + m(\hat{6}) = 180°$.
e. externe de aceeași parte a secantei, suplementare: $m(\hat{1}) + m(\hat{8}) = m(\hat{2}) + m(\hat{7}) = 180°$.

Teorema reciprocă. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează două unghiuri alterne interne congruente sau alterne externe congruente sau corespondente congruente sau interne de aceeași parte a secantei suplementare sau externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

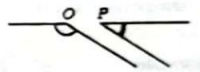
Unghiuri cu laturi paralele. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt:
a. congruente, dacă sunt de același fel (adică sunt ambele ascuțite, obtuze sau drepte)
b. suplementare dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz.



$\widehat{M} \equiv \widehat{N}$

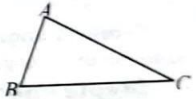


$\hat{A} \equiv \hat{B}$



$m(\hat{O}) + m(\hat{P}) = 180°$

2. Triunghiuri



Definiție. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Se numește *triunghi* figura formată din reuniunea semidreptelor $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$.

$$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

Elementele triunghiului

◊ segmentele $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$ se numesc *laturile triunghiului ABC.*
◊ $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ se numesc *unghiurile triunghiului ABC.*
◊ punctele A, B, C se numesc *vârfurile triunghiului ABC.*

Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor sale. Lungimile laturilor triunghiului ABC se notează frecvent astfel: $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$. În acest caz, *perimetrul* triunghiului ABC este $P = a + b + c$, iar *semiperimetrul* este $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

a. *Triunghiul oarecare* (*scalen*) este triunghiul în care lungimile laturilor, exprimate în aceeași unitate de măsură, au valori diferite.
b. *Triunghiul isoscel* este triunghiul care are două laturi congruente. Latura necongruentă se numește *bază.*
c. *Triunghiul echilateral* este triunghiul care are toate laturile congruente.

Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

a. *Triunghiul ascuțitunghic* este triunghiul care are toate unghiurile ascuțite.

b. *Triunghiul dreptunghic* este triunghiul care are un unghi drept. Latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*, iar laturile alăturate unghiului drept se numesc *catete*.

c. *Triunghiul obtuzunghic* este triunghiul care are un unghi obtuz.

Congruența triunghiurilor. Triunghiurile care au elementele corespunzătoare, congruente două câte două, se numesc *triunghiuri congruente*.

Cazurile de congruență. Pentru a arăta că două triunghiuri date sunt congruente este suficient să verificăm trei congruențe, dintre care cel puțin o congruență de laturi.

Cazul L.U.L. Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de ele, respectiv congruente sunt congruente.

Cazul U.L.U. Două triunghiuri care au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt congruente.

Cazul L.L.L. Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente.

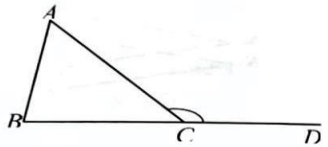
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Teoremă. În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Consecințe. **1.** Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuțite sunt complementare.

2. Toate unghiurile triunghiurilor echilaterale au măsura de 60°.

Unghiul exterior triunghiului ABC este unghiul adiacent și suplementar unui unghi al triunghiului.



Exemplu. Unghiul $\widehat{ACD}$ este unghi exterior triunghiului ABC, unde $[CD$ este semidreapta opusă semidreptei $[CB$.

Observație. Un triunghi are șase unghiuri exterioare, două câte două opuse la vârf.

Teorema unghiului exterior. Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

Drepte importante în triunghi

Înălțimea este perpendiculara construită dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă.

Dreptele care conțin înălțimile oricărui triunghi sunt concurente într-un punct numit ortocentrul triunghiului, notat, de regulă, cu H.

Mediana este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

În orice triunghi, medianele sunt concurente într-un punct G, numit centru de greutate al triunghiului. Pe fiecare dintre mediane, G se află la două treimi de vârf și o treime de bază.

Bisectoarele unui triunghi sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului.

În orice triunghi, bisectoarele sunt concurente într-un punct notat de regulă cu I, care este centrul cercului înscris în triunghi.

Mediatoarele unui triunghi sunt mediatoarele laturilor triunghiului.

În orice triunghi, mediatoarele sunt concurente într-un punct notat de regulă cu O, care este centrul cercului circumscris triunghiului.

Linia mijlocie a unui triunghi este segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi.

Triunghiul care are ca laturi liniile mijlocii ale triunghiului ABC se numește triunghi *median* al triunghiului ABC. Vârfurile triunghiului median sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

În orice triunghi, orice linie mijlocie este paralelă cu latura pe care nu o intersectează (a treia) și are lungimea cât jumătate din lungimea acesteia.

Proprietățile triunghiului isoscel

Teoreme referitoare la unghiurile alăturate bazei

1. Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

2. Dacă un triunghi are două unghiuri congruente atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la bisectoare și înălțime

1. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului format de laturile congruente este inclusă în înălțimea corespunzătoare bazei.

2. Într-un triunghi isoscel înălțimea din vârful opus bazei conține și bisectoarea unghiului.

3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la bisectoare și mediană

1. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului format de laturile congruente conține mediana corespunzătoare bazei triunghiului.

2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în bisectoarea unghiului opus bazei.

3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și mediana corespunzătoare laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la înălțime și mediană

1. Într-un triunghi isoscel înălțimea coborâtă din vârful opus bazei conține mediana corespunzătoare acesteia.

2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în înălțimea coborâtă din vârful opus bazei.

3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și înălțime corespunzătoare laturii opuse unghiului, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la mediatoarea bazei

1. Într-un triunghi isoscel mediatoarea bazei trece prin vârful opus bazei.

2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în mediatoarea corespunzătoare bazei.

3. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului opus bazei este inclusă în mediatoarea corespunzătoare bazei.

4. Într-un triunghi isoscel înălțimea coborâtă din vârful opus bazei este mediatoarea bazei.

Teoremele de mai sus pot fi restrânse într-o formulare aproximativă, astfel:

În orice triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei este bisectoare, înălțime și mediatoare în triunghi.

Alte proprietăți ale triunghiului isoscel:

1. În orice triunghi isoscel medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

2. În orice triunghi isoscel înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

3. Triunghiul cu două mediane congruente este isoscel.

4. Triunghiul cu două înălțimi congruente este isoscel.

Proprietățile triunghiului echilateral

1. Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente, fiecare având măsura de 60°.

2. Dacă un triunghi are toate unghiurile congruente atunci el este echilateral.

3. Triunghiul isoscel cu un unghi cu măsura de 60° este echilateral.

4. Într-un triunghi echilateral, mediana, înălțimea și mediatoarea fiecărei laturi, precum și bisectoarea unghiului opus laturii, coincid.

Proprietățile triunghiului dreptunghic

1. **Teorema 30°- 60°- 90°.** Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit cu măsura de 30°, atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este jumătate din lungimea ipotenuzei.
2. Dacă într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei atunci măsura unghiului opus acelei catete este de 30°.
3. **Mediana corespunzătoare ipotenuzei.** În orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.
4. Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind cel opus laturii căreia i s-a considerat mediana.

Cazurile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Catetă-catetă (C.C.)	Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.
Catetă–unghi (C.U.)	Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit, respectiv, congruente, sunt congruente.
Ipotenuză-catetă (I.C.)	Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă, respectiv congruente, sunt congruente.
Ipotenuză-unghi (I.U.)	Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit, respectiv congruente, sunt congruente.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. În triunghiul ABC, latura opusă unghiului $\measuredangle ABC$ este ... .
2. În triunghiul DEF, unghiul opus laturii $[DE]$ este ... .
3. În triunghiul XYZ, unghiurile alăturate laturii $[XZ]$ sunt ... .
4. În triunghiul MNP, latura cuprinsă între vârfurile unghiurilor $\measuredangle N$ și $\measuredangle P$ este ... .
5. Triunghiul MNP este isoscel de bază $[NP]$. Atunci unghiurile congruente sunt ... .
6. Triunghiul ABC este isoscel de bază $[AC]$. Atunci laturile congruente sunt ... .
7. Triunghiul MNP are $MP = 10$ și $NP = 10$. Unghiurile congruente vor fi ... .
8. În triunghiul ABC avem $\measuredangle A = 30^\circ$ și $\measuredangle B = 30^\circ$. Atunci laturile egale sunt ... .
9. În triunghiul XYZ avem $XY = 10, \measuredangle Y \equiv \measuredangle Z$. Atunci XZ are lungimea ... .
10. În triunghiul XYZ avem $XY > YZ > ZX$. Cel mai mare unghi al triunghiului este ... .
11. În triunghiul ABC avem $AB = AC = 5$. Cea mai mare valoare naturală pentru BC este ... .
12. Un triunghi are lungimile laturilor reprezentate prin numere naturale nenule mai mici sau egale cu 2. Clasificat în funcție de lungimile laturilor, triunghiul este sigur ... .

13. Un triunghi ABC are $m(\measuredangle B) = 30^\circ$, $m(\measuredangle A) = 70^\circ$. Cea mai lungă latură este ... .
14. Un triunghi are două laturi egale și un unghi de 60°. Atunci triunghiul este ... .
15. Știm că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și că $AC = 13$. Atunci PM are lungimea ... .
16. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, atunci triunghiul ΔABC este ... .
17. Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și că $m(\measuredangle P) = 55^\circ$, atunci unghiul C are măsura de ... .
18. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$, atunci unghiul A are măsura de ... .
19. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA \equiv \Delta MNP$ și $AB = 10$, atunci MP este egală cu ... .
20. Se știe că toate lungimile laturilor unui triunghi sunt reprezentate de numere naturale nenule și că una dintre ele are lungimea egală cu 1. Atunci triunghiul este ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie triunghiul MNP cu $MN = 2$, $NP = 3$, $MP = 4$. Care este cel mai mare unghi al triunghiului dat? Dar cel mai mic?
22. Un triunghi isoscel are perimetrul 25 cm și lungimea bazei de 5 cm. Calculați lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului.
23. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 12 cm. Determinați lungimea laturilor triunghiului dat.
24. Perimetrul unui triunghi este de 27 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea se exprimă prin trei numere impare consecutive.
25. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 22 cm. Știind că una din laturi are lungimea egală cu 8 cm, determinați lungimile celorlalte două laturi.
26. Un triunghi are perimetrul egal cu 12 cm. Determinați lungimile celor trei laturi știind că a doua este cu 2 cm mai lungă decât prima și cu 1 cm mai scurtă decât a treia.
27. Fie triunghiul ABC, cu $AB < AC$, și punctul $D \in [AC]$ astfel încât $AD = AB$. Se notează cu M punctul în care bisectoarea unghiului BAC taie latura $[BC]$. Arătați că $[MB] \equiv [MD]$.
28. Pe laturile triunghiului isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, se consideră punctele $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$ astfel încât $[AF] \equiv [AE]$. În afara dreptei BC se iau punctele $M, N \in BC$, astfel încât $B \in (CM)$, $C \in (BN)$ și $[MB] \equiv [CN]$. Demonstrați că:
    a) $[ME] \equiv [NF]$;
    b) $\measuredangle AFN \equiv \measuredangle AEM$;
    c) $[AM] \equiv [AN]$.
29. Un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura de 45° și lungimea unei catete de 10 cm. Determinați lungimea celeilalte catete.
30. Un triunghi dreptunghic isoscel are lungimea ipotenuzei egală cu 12 cm. Determinați lungimea înălțimii dusă din vârful drept.
31. Fie O un punct aflat în interiorul triunghiului echilateral ABC. Știind că $AO = BO = CO$, demonstrați că $\Delta OAB \equiv \Delta OBC \equiv \Delta OCA$ și determinați măsura unghiului BOC.

32. În triunghiul ABC, mediana $[AM]$ se prelungeşte cu un segment $[MN]$ astfel încât M este mijlocul lui $[AN]$. Demonstraţi că $AB = CN$ şi că $AC = BN$.

33. Se ştie că $\Delta BAD \equiv \Delta CAD$ şi că punctele B şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AD. Demonstraţi că :
a) ΔABC este isoscel ;
b) $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC.

34. Se ştie că $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ şi că punctele A şi D sunt de o parte şi de alta a dreptei BC. Arătaţi că :
a) $[AC] \equiv [BD]$;
b) $\Delta BAD \equiv \Delta CDA$.

35. Ştiind că $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC şi că punctele B şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AD, demonstraţi că:
a) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$;
b) $[DB] \equiv [DC]$.

36. Fie triunghiul ABC, cu $AB = AC$, şi $E \in (BC)$, $F \in (CE)$, astfel încât $BE = CF$. Demonstraţi că :
a) $BF = CE$;
b) $AF = AE$.

37. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctele M, N, P alese astfel încât C este mijlocul segmentului $[BM]$, A este mijlocul segmentului $[CN]$, iar B este mijlocul segmentului $[AP]$. Demonstraţi că triunghiul MNP este echilateral.

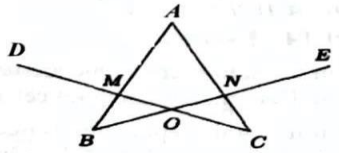
38. Într-un triunghi dreptunghic ABC avem $m(\sphericalangle A) = 90°$, $BC = 10$, $AB = 5$. Determinaţi măsura unghiului ABC şi lungimea medianei din A.

39. În triunghiul ABC avem $AB = AC$, $BD \perp AC$, $D \in (AC)$ şi $BD = \frac{AC}{2}$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

40. În exteriorul triunghiului ascuţitunghic MNP se construiesc triunghiurile echilaterale MNQ şi MPR. Demonstraţi că $PQ = RN$.

41. Fie triunghiul ABC cu proprietatea că lungimea medianei din vârful A este mai scurtă decât jumătatea lungimii laturii $[BC]$. Demonstraţi că triunghiul este obtuzunghic.

42. În figura alăturată, avem $[AB] \equiv [AC]$, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $[BM] \equiv [CN]$, $BN \cap CM = \{O\}$, $E \in BN$, $D \in CM$ şi $[EN] \equiv [DM]$.
Demonstraţi că:
a) $[BD] \equiv [CE]$;
b) $[DA] \equiv [EA]$;
c) $[AO$ este bisectoarea unghiului DAE;
d) $[DN] \equiv [ME]$;
e) $\widehat{BME} \equiv \widehat{CND}$.



Tema 2.2
Patrulatere

Patrulaterul este poligonul cu patru laturi.

Un patrulater se numeşte *convex* dacă oricare ar fi două puncte aflate în interiorul său, segmentul care le uneşte este inclus în interiorul patrulaterului.

Un patrulater se numeşte *concav* dacă există două puncte în interiorul său astfel încât segmentul care le uneşte nu este inclus în interiorul patrulaterului.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu $360°$.

Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

1. Într-un paralelogram sunt verificate următoarele proprietăţi:
- Laturile opuse sunt congruente.
- Unghiurile opuse sunt congruente.
- Oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.
- Diagonalele se taie în segmente congruente.

2. Dacă într-un patrulater este verificată una din proprietăţile enunţate anterior, atunci patrulaterul este paralelogram.

3. Dacă într-un patrulater două laturi opuse sunt paralele şi congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.

1. Orice dreptunghi este paralelogram, deci are toate proprietăţile paralelogramului.
2. Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.
3. Unghiurile unui dreptunghi sunt congruente şi au măsura de 90°, fiecare.
4. Un paralelogram este dreptunghi dacă şi numai dacă are diagonalele congruente.

Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

1. Orice romb este paralelogram, deci rombul are toate proprietăţile paralelogramului.
2. Toate laturile unui romb sunt congruente.
3. Diagonalele unui romb sunt perpendiculare.
4. Diagonalele unui romb sunt bisectoarele unghiurilor rombului.
5. Un paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.
6. Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci paralelogramul este romb.

Pătratul este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.
Echivalent, se spune că pătratul este rombul cu un unghi drept.

1. Toate laturile unui pătrat sunt congruente.
2. Toate unghiurile unui pătrat sunt congruente, deci drepte.
3. Diagonalele unui pătrat sunt congruente, perpendiculare şi au acelaşi mijloc.
4. Diagonalele unui pătrat sunt bisectoarele unghiurilor.
5. Dacă un paralelogram are două laturi consecutive congruente şi un unghi drept, atunci este pătrat.
6. Un paralelogram are diagonalele congruente şi perpendiculare, este pătrat.

Trapezul este patrulaterul convex care are două laturi paralele şi două laturi neparalele. Laturile paralele se numesc baze.

Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte *trapez isoscel*. Trapezul cu una dintre laturile neparalele perpendiculare pe baze se numeşte *trapez dreptunghic*.

Segmentul de dreaptă determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte *linie mijlocie* a trapezului.

Trapezul isoscel are următoarele proprietăţi:

1. Unghiurile alăturate unei baze a unui trapez isoscel sunt congruente;
2. Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente.
3. Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.
4. Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă diagonalele sunt congruente.
5. Într-un trapez linia mijlocie este paralelă cu bazele şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

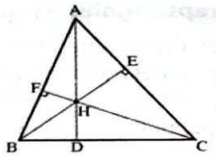
Proprietăţile liniei mijlocie a trapezului

1. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu latura a treia şi are ca lungime jumătate din lungimea acesteia.
2. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ a triunghiului ABC şi $MN \parallel BC$ $(N \in BC)$, atunci N este mijlocul laturii $[AC]$.
3. Într-un trapez linia mijlocie este paralelă cu bazele şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

Ariile figurilor geometrice

Aria triunghiului. Se calculează cu una din formulele:

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$ sau $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$.



Pentru triunghiul dreptunghic putem folosi şi formula:

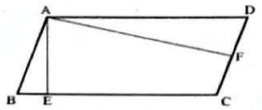
$\mathcal{A} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1, c_2 sunt lungimile catetelor.

Proprietatea medianei. O mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (cu ariile egale).

Aria patrulaterului. Pentru a calcula aria unui patrulater oarecare $ABCD$ se descompune patrulaterul în triunghiuri: $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD}$.

Aria paralelogramului

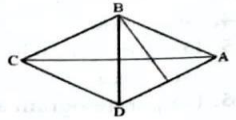
Dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci:
$\mathcal{A}_{ABCD} = BC \cdot AE = DC \cdot AF$ sau $\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$.



Aria dreptunghiului. Fie $ABCD$ un dreptunghi de dimensiuni $AB = L$ şi $BC = l$; atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l$.

Aria pătratului. Dacă $ABCD$ este pătrat de latură $AB = l$, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = l^2$.

Aria rombului. Dacă $ABCD$ este romb, de latură $AB = l$ şi înălţime h, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = l \cdot h$.



Dacă d_1 şi d_2 sunt lungimile diagonalelor, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

4. Aria trapezului. Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ sau $\mathcal{A}_{ABCD} = l_m \cdot h$, unde B şi b sunt lungimile bazelor, l_m este lungimea liniei mijlocii, iar h este lungimea înălţimii trapezului.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu ...°.
2. Într-un patrulater convex suma măsurilor a două unghiuri este 190°. Atunci suma măsurilor celorlalte două unghiuri este egală cu ...°.
3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu diagonalele de 14 cm şi 20 cm, iar M,N,P,Q mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD]$, respectiv $[AD]$. Perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este egal cu ... cm.
4. Paralelogramul $ABCD$ are unghiul BAD de 47°. Măsura unghiului ABC este egală cu ... °.
5. În paralelogramul $ABCD$, latura AD este perpendiculară pe diagonala BD, $AD = 5$ cm şi $BD = 12$ cm. Aria paralelogramului este egală cu... cm^2.
6. Un paralelogram are măsura unghiului ascuţit o cincime din măsura unghiului obtuz. Măsura unghiului ascuţit este egală cu ...°.
7. Aria unui paralelogram $ABCD$ este 36 cm^2 şi O este punctul de intersecţie al diagonalelor. Aria triunghiului AOB este egală cu ... cm^2.
8. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$ cm şi $BC = 5$ cm, punctul M aparţine laturii CD. Aria triunghiului AMB este egală cu ... cm^2.
9. Perimetrul dreptunghiului cu aria de 100 cm^2 şi lăţimea de 5 cm este egal cu ... cm.
10. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$ mm şi $BC = 6$ mm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează segmentul $[CD]$ în punctul M. Lungimea segmentului $[DM]$ este egală cu ... mm.
11. Lungimea unui dreptunghi este cu 5 cm mai mare decât lăţimea. Perimetrul dreptunghiului este egal cu 28 cm. Lungimea dreptunghiului este de ... cm.
12. Un romb are diagonalele de lungimi 12 dm şi 24 dm. Aria rombului este egală cu ... dm^2.
13. Perimetrul rombului $ABCD$, care are $DB = 12$ cm şi măsura unghiului BAD de 60°, este egal cu ... cm.
14. Un pătrat are perimetrul de 8 cm. Lungimea laturii pătratului este egală cu ... cm.
15. Fie pătratul $ABCD$ şi punctul M mijlocul laturii $[AB]$. Dacă $AB = 6$ m, atunci aria patrulaterului $MBCD$ este egală cu ... m^2.
16. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC ale pătratului $ABCD$ care are latura de 12 cm. Aria triunghiului MND este egală cu ... cm^2.

17. Un trapez are bazele de 8 cm și de 10 cm. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu ... cm.

18. Aria unui trapez cu lungimea liniei mijlocii de 10 cm și înălțimea de 7 cm este egală cu ... cm^2.

19. Un trapez isoscel are linia mijlocie de 8 cm. Dacă lungimea unei laturi neparalele reprezintă jumătate din lungimea liniei mijlocii, atunci perimetrul trapezului este egal cu ... cm.

20. Un trapez isoscel $ABCD$ are bazele $AB = 4$ cm și $CD = 8$ cm, iar măsura unghiului BCD este de $60°$. Perimetrul trapezului este egal cu ... cm.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. ***a)*** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 3, 4, 8 și 9.
b) Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu 1; 0,5; 0,(3) și 0,25.

22. Patrulaterul convex $ABCD$ are perimetrul de 75 cm. Triunghiul ABC are perimetrul de 48 cm. Știind că $AC = 15$ cm, aflați perimetrul triunghiului ADC.

23. Paralelogramul $ABCD$ are perimetrul egal cu 23,6 m. Știind că $AB = 7{,}4$ m, determinați AD.

24. În paralelogramul $ABCD$ avem $m(\sphericalangle A) = 60°$, $BD \perp BC$, $AB = 8$ cm și M mijlocul laturii (AB).
a) Calculați perimetrul paralelogramului.
b) Determinați măsura unghiului MDC.

25. Fie $ABCD$ un paralelogram, la care se cunosc $AB = 12$ dm și $AE = 6$ dm, unde $AE \perp CD$, $E \in (CD)$.
a) Calculați aria paralelogramului $ABCD$;
b) Calculați aria triunghiului AOB, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

26. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 45°$, unde ducem $DM \perp AB$, $M \in (AB)$ și $BN \perp DC$, $N \in (DC)$. Dacă $DN = 6$ cm și $AB = 2\,DN$, atunci:
a) Calculați aria patrulaterului $DMBN$.
b) Calculați aria triunghiului NOC, unde $AC \cap BD = \{O\}$.

27. Un dreptunghi are perimetrul de 48 m. Se știe că lungimea este de trei ori mai mare decât lățimea.
a) Determinați dimensiunile dreptunghiului.
b) Un teren are forma și dimensiunile dreptunghiului de la a). Stabiliți dacă aria terenului este mai mare decât 2 ari.

28. Fie $ABCD$ un dreptunghi și $\{O\} = AC \cap BD$. Pe diagonala $[BD]$ se consideră punctele E și F astfel încât $[BE] \equiv [DF]$. Arătați că:
a) O este mijlocul segmentului $[EF]$.
b) $AECF$ este paralelogram.

29. Fie rombul $ABCD$ și punctul E situat pe latura $[AB]$ astfel încât unghiurile ACE și BCE să fie congruente. Măsura unghiului BEC este egală cu $15°$. Calculați măsura unghiului ABC.

30. Rombul $ABCD$ are $m(\sphericalangle A) = 60°$. Fie E mijlocul laturii (AB) și F mijlocul laturii (BC). Notăm $AC \cap BD = \{O\}$.
a) Demonstrați că $[DE] \equiv [AO]$.
b) Demonstrați că triunghiul DEF este echilateral.

31. Un romb are diagonalele de 1,5 m și 20 dm și latura egală cu 25 dm.
a) Stabiliți dacă aria rombului este mai mare decât 1,6 m^2.
b) Calculați câți cm are înălțimea rombului.

32. Lățimea unui dreptunghi este $\frac{3}{4}$ din latura unui pătrat cu perimetrul de 64 cm. Cele două patrulatere au același perimetru.
a) Aflați dimensiunile dreptunghiului.
b) Aflați aria dreptunghiului.

33. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB > BC$, cu măsura unghiului format de diagonale de $60°$ și $AB = 12$ cm. Se știe că $BE \perp CA$, $E \in (AC)$ și $CE = 3$ cm.
a) Aflați BC.
b) Calculați aria dreptunghiului.

34. Se consideră pătratul $ABCD$. Pe dreapta AC se consideră punctul M astfel încât $C \in (AM)$ și $CM = DC$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului DBM.

35. Un pătrat și un dreptunghi au perimetre egale. Aria pătratului este egală cu 64 cm^2, iar lungimea dreptunghiului este egală cu 10 cm.
a) Calculați lungimea laturii pătratului.
b) Calculați aria dreptunghiului.

36. Un pătrat $ABCD$ are aria de 18m^2. Se dublează latura pătratului, obținându-se un alt pătrat, $MNPQ$.
a) Câți metri are latura pătratului $ABCD$?
b) Aflați aria pătratului $MNPQ$.

37. Calculați aria unui trapez cu baza mică de 12 cm, baza mare de 2 dm și înălțimea de 4 cm.

38. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, se cunosc $CD = 6$ cm, $BC = 5$ cm și $m(\sphericalangle ADC) = 120°$. Se construiește $CE \perp AB$, $E \in (AB)$.
a) Calculați AE.
b) Calculați perimetrul trapezului.

39. Trapezul isoscel $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\sphericalangle B) = 45°$. Știind că $CD = 12$ cm și $AB = 2{,}25 \cdot CD$ aflați:
a) înălțimea trapezului.
b) aria trapezului.

40. În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, se știe că $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 45°$, $AC \perp BC$, iar $CD = 12$ cm.
a) Arătați că $AB = 2CD$.
b) Calculați aria trapezului.

41. Un teren de formă dreptunghiulară are dimensiunile de 10 m și 4 m. Terenul se acoperă cu dale de pavaj. Acestea au formă de dreptunghi cu dimensiunile de 50 cm, respectiv 20 cm.

a) Aflați aria terenului.
b) Câte dale sunt necesare pentru a acoperi terenul în totalitate?

42. Un panou publicitar este dreptunghiular, are lungimea de trei ori mai mare decât lățimea și perimetrul de 16 m.
a) Arătați că lățimea panoului este egală cu 2 m.
b) Stabiliți dacă diagonala panoului are lungimea mai mare de 6 m.
c) Se vopsește panoul. Dacă la fiecare m^2 sunt necesari 0,3 l de vopsea, stabiliți numărul minim de cutii de vopsea de 1l ce trebuie cumpărate.

43. O cameră are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, unde $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, iar $m(\sphericalangle B) = 60°$. Se știe că $AB = 8$ m și $CD = 4$ m.
a) Arătați că aria camerei este egală cu $24\sqrt{3}$ m^2.
b) Se parchetează podeaua camerei. Bucățile de parchet au formă dreptunghiulară cu lungimea de 50 cm și lățimea de 10 cm. Stabiliți numărul minim de astfel de bucăți ce trebuie cumpărate pentru parchetarea întregii podele.
c) Dacă parchetul are prețul de achiziție de 40 lei/m^2, stabiliți dacă ajung 1500 lei pentru cumpărarea parchetului necesar, știind că se acordă 10% reducere pentru toată cantitatea oricărei persoane care cumpără minim 25 m^2 de parchet.

44. Un tablou are forma unui dreptunghi de lungime 40 cm și lățime 30 cm (împreună cu rama). Rama tabloului are lățimea de 5 cm.
a) Calculați suprafața ramei.
b) Se vopsește rama. Dacă la fiecare m^2 sunt necesari 0,5 l de vopsea, stabiliți dacă o cutie de 1l este suficientă pentru a da două straturi de vopsea.

45. O alee de formă dreptunghiulară cu lungimea de 25 m și lățimea de 5 dm se pavează cu plăci în formă de trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, având baza mare de 2 dm și baza mică de 1 dm.
a) Care este suprafața aleii ?
b) Aflați înălțimea unei plăci de pavaj.
c) Care este numărul minim de plăci necesare pentru pavarea întregii alei ?

46. Un muncitor a montat 25 de geamuri. Fiecare geam are forma unui pătrat cu latura de 40 cm.
a) Care este suprafața totală a geamurilor montate?
b) Costul montării unui metru pătrat de geam este de 20 lei. Câți lei trebuie plătiți pentru montarea celor 25 geamuri ?

47. O grădină de formă dreptunghiulară are lungimea cu 24 m mai mare decât lățimea și aria egală cu 256 m^2. Grădina este împrejmuită de un gard.
a) Arătați că lățimea grădinii este de 8 m.
b) Aflați lungimea gardului care împrejmuiește grădina.
c) Arătați că nu putem planta doi pomi în grădină, astfel încât distanța dintre ei să fie mai mare de 33 m.

48. Un teren agricol are forma unui trapez isoscel $ABCD$ cu lungimea bazei mari $[CD]$ de 50 m, lungimea bazei mici $[AB]$ de 30 m și măsura unghiului C de 45^0.
a) Calculați suprafața terenului.
b) Pe porțiunea de teren corespunzătoare triunghiului ABC se cultivă castraveți. Calculați aria acestui teren.
c) Dacă producția medie de castraveți este de 50 tone/ha, calculați câte kilograme de castraveți a recoltat un fermier de pe suprafața ABC.

49. Mihai are la dispoziție plăci dreptunghiulare, fiecare având dimensiunile de 10 cm și 7 cm.
a) Calculați latura pătratului ce poate fi construit cu 70 de astfel de plăci.
b) Determinați numărul minim de plăci cu care Mihai poate construi un pătrat.

50. Un teren dreptunghiular cu dimensiunile de 30 m și 20 m se împrejmuiește cu un gard de sârmă, susținut de stâlpi situați la distanța de 5 m unul de altul.
a) Determinați numărul stâlpilor.
b) Care este lungimea totală a sârmei folosite, daca aceasta se pune pe două rânduri ?

Tema 2.3
Asemănare

Segmente proporţionale. Patru segmente se numesc *proporţionale* dacă se poate forma o proporţie cu lungimile acestora.

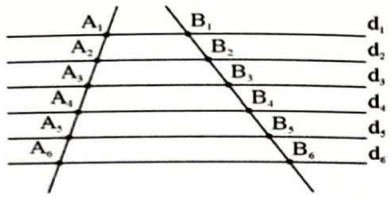
Exemplu. Fie segmentele: $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 0{,}5$ cm, $DE = 1$ cm.

Atunci $\frac{AB}{BC} = 2$, $\frac{DE}{CD} = 2$ şi $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, deci segmentele date sunt proporţionale.

Teorema paralelelor echidistante. Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

În figura alăturată, avem:

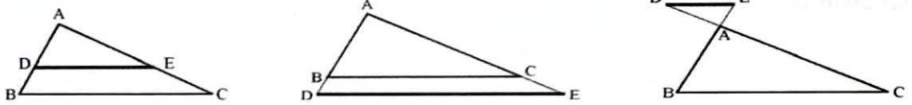
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \\ A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots \end{array}\right| \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$$



Teorema lui Thales. O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau prelungirile acestora, segmente proporţionale.

Pentru figurile de mai jos din $DE \parallel BC$, aplicând teorema lui Thales, rezultă

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CE} \quad \text{sau} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$



Reciproca teoremei lui Thales. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in AB$, $E \in AC$, în acelaşi semiplan determinat de paralela prin A la BC. Dacă $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, atunci $DE \parallel BC$.

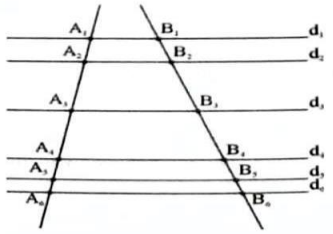
Observaţie. În condiţiile de mai sus, dacă $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$, atunci $DE \not\parallel BC$.

Aplicaţii ale teoremei lui Thales

1. Teorema paralelelor neechidistante.

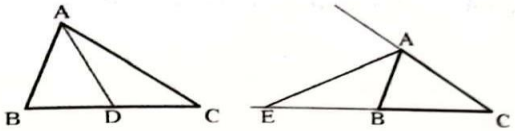
Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporţionale.

Pentru figura alăturată, dacă: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots$ şi a, b sunt două secante, atunci $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \ldots$



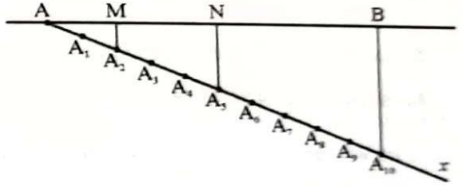
2. Teorema bisectoarei. Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporţionale cu celelalte două laturi.

În figura din stânga avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, iar în dreapta $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$, unde $[AE]$ este bisectoarea unghiului exterior unghiului BAC într-un triunghi în care $AB \neq AC$.



3. Împărţirea unui segment în părţi proporţionale cu numere (segmente) date.

De exemplu, pentru a împărţi un segment $[AB]$ în părţi proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5 procedăm astfel. Considerăm semidreapta $[Ax$ şi, cu ajutorul compasului construim 10 segmente congruente ($2 + 3 + 5 = 10$). Fie $AA_2 = 2u$, $A_2A_5 = 3u$, $A_5A_{10} = 5u$. Unim A_{10} cu B şi apoi ducem $A_5N \parallel A_{10}B$ şi $A_2M \parallel A_{10}B$. Cu ajutorul teoremei paralelor neechidistante obţinem $\frac{AM}{2} = \frac{MN}{3} = \frac{NB}{5}$.

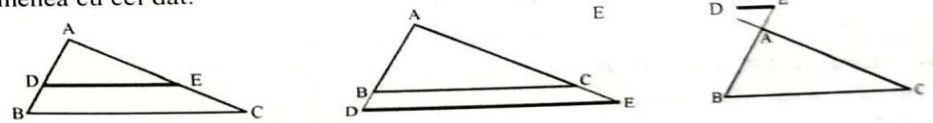


Triunghiuri asemenea. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile corespondente congruente şi laturile corespondente proporţionale.

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E,\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \text{ şi } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k,$$

unde k se numeşte raport de asemănare.

Teorema fundamentală a asemănării. O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat.



Pentru figurile de mai sus avem: $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Criterii de asemănare

Criteriul U.U. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de unghiuri corespondente congruente.

Criteriul L.U.L. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de laturi corespondente proporţionale şi unghiurile dintre ele congruente.

Criteriul L.L.L. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile corespondente proporţionale.

Observaţia 1. Raportul înălţimilor, medianelor şi bisectoarelor ce pornesc din vârfurile corespondente a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

Observaţia 2. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Raportul a două segmente congruente este egal cu ... .

2. O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente ... .

3. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile corespondente ... și laturile corespondente ... .

4. Linia mijlocie a unui triunghi are lungimea egală cu ... din lungimea laturii cu care este paralelă.

5. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu ... raportului de asemănare.

6. În triunghiul ABC și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și $MN \parallel BC$.

a) Valoarea raportului $\frac{AN}{AC}$ este egală cu ... .

b) Valoarea raportului $\frac{CN}{AN}$ este egală cu ... .

c) Dacă $AB = 15$ și $AN = 8$ cm, lungimea segmentului $[AM]$ este ... cm.

d) Dacă $AB = 15$ și $AN = 8$ cm, lungimea segmentului $[AC]$ este ... cm.

7. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E, $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, astfel încât $DE \parallel AC$.

a) Dacă $DB = 4$ cm, $AB = 10$ cm și $BC = 15$ cm, atunci $BE = \ldots$ cm.
b) Dacă $EC = 3$ cm, $BE = 12$ cm și $AD = 6$ cm, atunci $AB = \ldots$ cm.
c) Dacă $BE = 7$ cm, $AD = 10$ cm și $AB = 24$ cm, atunci $BC = \ldots$ cm.
d) Dacă $AD = 6$ cm, $AB = 16$ cm și $EC = 18$ cm, atunci $BE = \ldots$ cm.

8. În triunghiul ABC, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Dacă $EF \parallel BC$ și:

a) $AB = 18$ cm, $AC = 36$ cm, $AE = 12$ cm, atunci $AF = \ldots$ cm.
b) $AC = 16$ cm, $AF = 6$ cm, $EB = 5$ cm, atunci $AE = \ldots$ cm.
c) $AB = 27$ cm, $AE = 15$ cm, $FC = 16$ cm, atunci $AC = \ldots$ cm.
d) $AB = 24$ cm, $EB = 18$ cm, $FC = 12$ cm, atunci $AF = \ldots$ cm.

9. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele D și E, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Verificați dacă $DE \parallel BC$ în cazurile următoare:

a) $AB = 20$ cm, $BD = 11$ cm, $AC = 46$ cm și $AE = 18$ cm.
b) $AD = 12$ cm, $BD = 16$ cm, $AE = 30$ cm și $AC = 70$ cm.

10. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm și raportul de asemănare este $k = \frac{2}{5}$, atunci lungimea segmentului $[DE]$ este egală cu ... cm.

11. Dacă $\Delta CDE \sim \Delta MNP$, $DE = 6$ cm și raportul de asemănare $k = 2$, atunci lungimea segmentului $[NP]$ este egală cu ... cm.

12. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 6$ cm, $MN = 4$ cm, $MP = 2$ cm și $NP = 6$ cm, atunci perimetrul triunghiului ABC este egal cu ... cm.

13. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm, $PR = 10$ cm și $P_{ABC} = 48$ cm, atunci $AB = \ldots$ cm, $AC = \ldots$ cm, iar $BC = \ldots$ cm.

14. Fie triunghiurile asemenea ACB și DMP. Se cunoaște că $m(\sphericalangle A) = 35°$ și $m(\sphericalangle C) = 73°$. Atunci $m(\sphericalangle D) = \ldots°$, $m(\sphericalangle M) = \ldots°$ și $m(\sphericalangle P) = \ldots°$.

15. Dacă $\Delta ABD \sim \Delta CMN$, $m(\sphericalangle C) = 39°$ și $m(\sphericalangle D) = 48°$, atunci măsura unghiului B este de $\ldots°$.

16. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 25$ cm, $AC = 30$ cm, $MP = 18$ cm și $m(\sphericalangle A) = 75°$, atunci lungimea segmentului $[MN]$ este ... cm, iar $m(\sphericalangle M) = \ldots °$.

17. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 20$ cm, $AD = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, perimetrul triunghiului EAB este ... cm.

18. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 15$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, perimetrul triunghiului EDC este ... cm.

19. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 7$ cm, $CD = 9$ cm și $AC = 8$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, lungimea segmentului $[AO]$ este ... cm.

20. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 20$ cm, $CD = 13$ cm și $AD = 7$ cm. Se consideră punctele $E \in (AD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $EF \parallel CD$, iar $AE = 3$ cm. Lungimea segmentului $[EF]$ este egală cu ... cm.

21. În trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$, $MN = 24$ cm și $PQ = 16$ cm. Dacă $MP \cap NQ = \{O\}$ și $OR \parallel MN$, $R \in (QM)$, atunci lungimea segmentului $[OR]$ este ... cm.

22. Fie triunghiurile asemenea ABC și DEF. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $EF = 12$ cm și $DF = 15$ cm, atunci $AC = \ldots$ cm, iar $DE = \ldots$ cm.

23. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se cunosc $AB = 12$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 11$ cm, $AB > DE$, iar raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 3. Perimetrul triunghiului DEF este egal cu ... cm.

24. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se știe că $AB = 2DE$.

a) Raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu ... .
b) Se știe că $\mathcal{A}_{ABC} = 8\ \text{cm}^2$. Aria triunghiului DEF este egală cu ... cm^2.

25. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea și $\mathcal{A}_{ABC} = 36\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_{DEF} = 4\ \text{cm}^2$. Valoarea raportului de asemănare al celor două triunghiuri este ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

26. În triunghiul ABC, punctele D, E, F, G, M și N sunt mijloacele segmentelor (AB), (AC), (AD), (AE), (DB), respectiv (EC). Se știe că $DE = 6$ cm.

a) Arătați că $FG \parallel DE \parallel MN$;
b) Calculați BC, MN și FG.

27. În triunghiul ABC, se cunosc $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Prelungim laturile $[BA]$ și $[CA]$ cu segmentele $[AD]$, respectiv $[AE]$, unde $AD = 2$ cm și $AE = 3$ cm.

a) Demonstrați că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$;
b) Calculați DE.

28. Într-un trapez linia mijlocie are lungimea de 27 cm iar segmentul care unește mijloacele diagonalelor este de 8 cm. Calculați lungimile bazelor trapezului.

29. Un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ are $AB = 26$ cm și linia mijlocie $MN = 18$ cm, $M \in (AD), N \in (BC)$.

a) Calculați lungimea bazei mici a trapezului;

b) Dacă P și Q sunt două puncte, $P \in (AB)$, $Q \in (DC)$ și $PQ \cap MN = \{R\}$, arătați că R este mijlocul segmentului $[PQ]$.

30. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$ notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{M\} = AD \cap BC$. Demonstrați că $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$ și $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC}$.

31. În triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Stabiliți dacă $DE \parallel BC$ în fiecare din situațiile:

a) $AD = 6$ cm, $AE = 3$ cm, $DB = 0{,}8$ dm, $EC = 40$ mm.

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$, $AE = 6$ cm, $EC = 4$ cm;

c) $DB = 30\%\, AB$, $EC = \frac{1}{3} AC$.

32. Fie punctele M și N situate pe laturile $[AC]$, respectiv $[BC]$ ale triunghiului dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$. Dacă $m(\sphericalangle C) = 30°$, $MN \parallel AB$, $MN = 6$ cm și $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$, calculați lungimile NC, BC și AB.

33. Fie $ABCD$ un dreptunghi și punctul $M \in (AB)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$. Dacă $MN \parallel AC$, $N \in (BD)$, iar $MN \cap BC = \{P\}$, calculați $\frac{BP}{BC}$ și $\frac{BN}{BD}$.

34. Fie triunghiul ABC și $(BD$ bisectoarea interioară a unghiului B. Aflați:

a) AD și DC știind că $AB = 15$ cm; $BC = 24$ cm și $AC = 26$ cm.

b) BC știind că $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{6}$ și $AB = 21$ cm.

35. Un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ are $AB = 18$ cm și $CD = 6$ cm.

a) Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului;

b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$, iar $AC = 16$ cm, calculați AO și OC.

36. Se consideră segmentul $[AB]$ de lungime 48 cm și punctul $M \in (AB)$. Calculați AM și MB dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$.

37. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $[AD] \equiv [DC] \equiv [BC]$, $m(\hat{B}) = 60^0$ și $CD = 4$ cm.

a) Calculați AB;

b) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați $\frac{MD}{MA}$.

38. Se consideră triunghiul ABC, $(AD$ bisectoarea $\hat{A}$, $D \in (BC)$. Se știe că $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 10$ cm.

a) Aflați BD și CD;

b) Dacă $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$, calculați perimetrul patrulaterului $ABDE$.

39. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M și N, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $AB = 9$ cm, $AM = 3$ cm și $NC = 4$ cm, calculați MB, AN și AC.

40. În triunghiul ABC, punctele M, N și P aparțin laturilor (AB), (AC), respectiv (BC), astfel încât $MN \parallel BC$ și $NP \parallel AB$.

a) Arătați că $MNPB$ este paralelogram;

b) Arătați că $\frac{AM}{AB} + \frac{PC}{BC} = 1$.

41. 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe laturile (AB) și (BC) se consideră punctele M și N, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ și $\frac{BN}{NC} = 3$.

a) Arătați că $MN \parallel AC$;

b) Dacă $MN \cap DB = \{P\}$, calculați $\frac{BP}{PD}$.

42. Fie triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm și $BC = 12$ cm. Pe latura (AB) se consideră punctul D, iar pe latura (AC) se consideră punctul E, astfel încât $AD = 4$ cm și $AE = 3$ cm.

a) Stabiliți dacă $DE \parallel BC$.

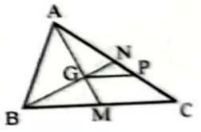
b) Calculați DE.

43. Fie triunghiul MNP cu $MN = 15$ cm, $MP = 20$ cm și $NP = 13{,}5$ cm. Pe latura (MN) se consideră punctul A astfel încât $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3}$, iar pe latura (MP) se consideră punctul B astfel încât $AB \parallel NP$.

a) Demonstrați că $ABPN$ este trapez.

b) Calculați $P_{\Delta MAB}$ și P_{ABPN}.

44. În figura alăturată, $[AM]$ și $[BN]$ sunt mediane în triunghiul ABC, iar $GP \parallel BC$. Se știe că $BC = 12$ cm și $AM = 9$ cm.



a) Calculați GP.

b) Dacă, în plus, $AC = 30$ cm, calculați NP.

45. În figura 2, $(AA'$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $A'D \parallel AC$ și $A'E \parallel AB$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$.

Se știe că $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm și $BC = 15$ cm.

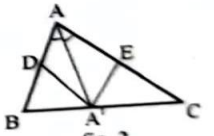


fig. 2

a) Stabiliți natura patrulaterului $ADA'E$.

b) Calculați perimetrul patrulaterului $ADA'E$.

46. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 8$ cm, $AC = 20$ cm și $BC = 16$ cm. Pe latura (AB) se consideră punctul D astfel încât $AD = 5$ cm. Se construiește $DE \parallel AC$, $E \in (BC)$, și apoi $EF \parallel AB$, $F \in (AC)$. Stabiliți natura patrulaterului $ADEF$ și apoi calculați perimetrul său.

47. În figura 5, $D \in (AC)$, $DE \parallel AB$ și $DF \parallel BC$.

a) Demonstrați că $\frac{AF}{AB}=\frac{BE}{BC}$.

b) Demonstrați că $\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{BC}=1$.

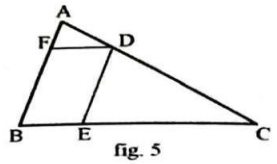


fig. 5

48. În figura 7, $ABCD$ este trapez, iar $EF \parallel AB$, $O \in (EF)$.

a) Demonstrați că $\frac{OE}{AB}+\frac{OE}{CD}=1$.

b) Demonstrați că $\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=2$.

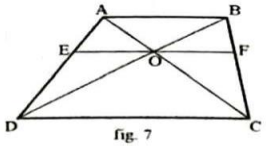


fig. 7

49. În figura 1, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, astfel încât $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$.

a) Demonstrați că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$;

b) Dacă $AB=10$ cm, $AC=12$ cm, $BC=15$ cm și $DE=9$ cm, calculați AE și AD.

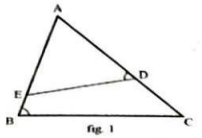


fig. 1

50. Se consideră triunghiurile isoscele ABC ($AB = AC$) și MNP ($MN = MP$). Dacă $m(\sphericalangle A)=78°$ și $m(\sphericalangle N)=51°$, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

51. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele D și E, astfel încât $DE \parallel BC$. Se cunosc $AD=5$ cm, $DB=6$ cm, $AE=x+2$ cm și $EC=x+4$ cm, unde $x>0$.

a) Arătați că $\frac{DE}{BC}=\frac{5}{11}$;

b) Calculați valoarea lui x.

52. În triunghiul ABC se consideră punctul $D \in (AB)$. Se construiesc $DE \parallel AC$ și $DF \parallel BC$ ($E \in (BC)$, $F \in (AC)$). Arătați că:

a) $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DB}$;

b) $\Delta BED \sim \Delta BCA$;

c) $\frac{AF}{FC}=\frac{CE}{EB}$.

53. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A)=90°$) se știe că $m(\sphericalangle B)=30°$, iar $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$. Pe latura (AB) se consideră punctul N, astfel încât $\frac{AN}{AB}=\frac{1}{3}$. Fie P mijlocul segmentului $[CN]$.

a) Arătați că $BN=2MP$;

b) Arătați că $APMN$ este romb.

54. Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90°$ și $AD \perp BC$. Demonstrați că:

a) $\Delta ABD \sim \Delta CBA$;

b) $\Delta ABD \sim \Delta CAD$;

c) $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

55. În triunghiul ABC, $AB=AC$, $m(\sphericalangle B)=72°$ și (BD este bisectoarea unghiului B, unde $D \in (AC)$. Demonstrați că:

a) ΔBDC este isoscel;

b) $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

56. În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Se știe că $AB=8$ cm, $AC=10$ cm și $BC=9$ cm.

a) Calculați BD și BC;

b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor ADB și ADC.

57. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$. Latura $[AB]$ se prelungește cu $[AN]$, astfel încât $[AN] \equiv [AB]$, iar $MN \cap AC = \{P\}$.

a) Arătați că $AM \parallel NC$;

b) Arătați că $PC=2AP$.

58. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se cunosc $AB=6$ cm, $AC=8$ cm și $BC=9$ cm, $AB>DE$, iar raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 2. Calculați perimetrul triunghiului DEF.

59. În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Se știe că $AB=12$ cm, $AC=18$ cm și $BC=15$ cm.

a) Calculați BD și BC;

b) Calculați raportul ariilor triunghiurilor ADB și ADC.

60. În figura 6, $ABCD$ este paralelogram. Se dau $AD=10$ cm, $M \in (AD)$, $AM=6$ cm. Dacă $AC \cap BM = \{P\}$ și $BM \cap CD = \{N\}$, calculați: $\frac{AB}{ND}, \frac{AB}{NC}, \frac{BP}{PN}, \frac{AP}{AC}, \frac{BP}{MN}$.

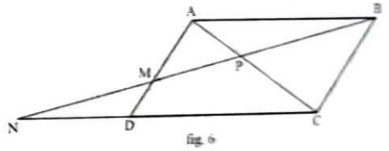
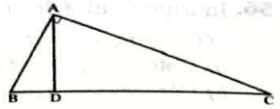


fig. 6

Tema 2.4
Relaţii metrice

Teorema înălţimii. Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

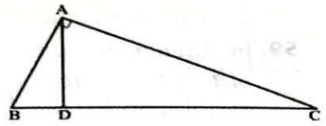


Cu notaţiile din figură, avem $AD^2 = BD \cdot CD$.

Lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei este raportul dintre produsul lungimilor catetelor şi lungimea ipotenuzei: $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Reciproca teoremei înălţimii. Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$ şi $AD^2 = BD \cdot CD$. Atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

Teorema catetei. Într-un triunghi dreptunghic lungimea fiecărei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei şi a lungimii proiecţiei catetei pe ipotenuză.

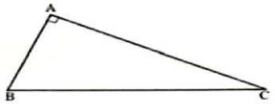


Cu notaţiile din figura alăturată avem: $\begin{cases} AB^2 = BD \cdot BC \\ AC^2 = CD \cdot BC \end{cases}$.

Reciproce ale teoremei catetei

1. În triunghiul ABC, dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi are loc una din egalităţile $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.
2. În triunghiul ABC, dacă există un punct $D \in (BC)$ care are proprietatea că $AB^2 = BC \cdot BD$ şi $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



Pentru figura alăturată: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Reciproca teoremei lui Pitagora. Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

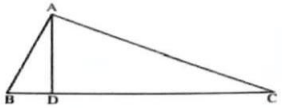
Observaţie. Dacă în triunghiul ABC avem $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $m(\sphericalangle A) > 90°$, iar dacă $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $m(\sphericalangle A) < 90°$.

Teorema lui Pitagora generalizată

Fie triunghiul ABC şi $D = \text{pr}_{BC}A$.

Dacă $m(\sphericalangle C) < 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

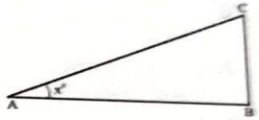
Dacă $m(\sphericalangle C) > 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$.



Noţiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Pentru orice triunghi dreptunghic se definesc rapoartele sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă, numite funcţii trigonometrice.

Pentru figura alăturată acestea se scriu:



$\sin x^0 = \frac{BC}{AC}$, $\cos x^0 = \frac{AB}{AC}$, $\text{tg}\, x^0 = \frac{BC}{AB}$, $\text{ctg}\, x^0 = \frac{AB}{BC}$.

Se observă că:

$$\text{tg}\, x^0 = \frac{\sin x^0}{\cos x^0}; \quad \text{ctg}\, x^0 = \frac{\cos x^0}{\sin x^0}; \quad \sin^2 x^0 + \cos^2 x^0 = 1.$$

Relaţii între funcţiile trigonometrice ale unghiurilor complementare

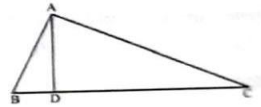
a. $\sin(90° - x°) = \cos x^0$ **b.** $\cos(90° - x^0) = \sin x^0$ **c.** $\text{tg}(90° - x^0) = \text{ctg}\, x^0$

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teorema cosinusului

Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle C) < 90°$, şi $D = \text{pr}_{BC}A$.



Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Din triunghiul dreptunghic ACD rezultă $CD = AC \cos C$, deci are loc relaţia

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C. \quad (1)$$

În mod asemănător, dacă $m(\sphericalangle C) > 90°$, se demonstrează că:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot AC \cdot \cos(180° - C) \quad (2)$$

Egalităţile **(1)** respectiv **(2)** sunt cunoscute drept teorema cosinusului.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile 1 dm şi $\sqrt{3}$ dm. Lungimea ipotenuzei este egală cu ... dm.
2. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 15 cm şi ipotenuza de 17 cm. Lungimea celeilalte catete este egală cu ... cm.
3. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 15 cm şi 20 cm. Înălţimea corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu ... cm.

4. Dreptunghiul cu lungimea de 8 cm și lățimea de 6 cm are diagonala egală cu ... cm.

5. Diagonala unui pătrat are lungimea de $2\sqrt{3}$ dm. Latura pătratului este egală cu ... dm.

6. Un dreptunghi $ABCD$ are $AB = 8$ cm și $BC = 4$ cm. Distanța de la punctul A la diagonala BD este egală cu ... cm.

7. Triunghiul ABC are $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 5$ cm. Atunci măsura unghiului C este egală cu ...°.

8. Un triunghi are lungimile laturilor 3 cm, 4 cm, 5 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.

9. Un triunghi dreptunghic are lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză egale cu 2 cm și 8 cm. Calculând aria triunghiului se obține ... cm^2.

10. Un triunghi ABC dreptunghic în A are $AB = 16$ cm și $BC = 20$ cm. Lungimea proiecției catetei AC pe ipotenuză este egală cu ... cm.

11. Aria rombului $ABCD$, care are $DB = 12$ cm și măsura unghiului BAD de 60°, este egală cu ... cm^2.

12. Rezultatul calculului $\text{tg}60° - 2\sin 60°$ este ... .

13. Rezultatul calculului $(\cos 30° + \sin 30°)(\cos 60° - \sin 60°)$ este ... .

14. Rezultatul calculului $\dfrac{\sin 30° \cos 60°}{\text{tg}45°}$ este ... .

15. Calculând valoarea expresiei $E = \cos x + \sin(90^0 - x)$ pentru $x = 30^0$ se obține ... .

16. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm. Rezultatul calculului $\sin B + \sin C$ este ... .

17. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Calculând $\sin^2 B + \cos^2 B$ se obține ... .

18. Măsura unghiului A din triunghiul ABC este de 30^0, iar $AB = 6$ cm și $AC = 10$ cm. Aria triunghiului ABC este egală ... cm^2.

19. Un romb are diagonalele de lungimi 6 m și 8 m. Calculând valoarea sinusului unui unghi al rombului se obține ... .

20. Rombul $ABCD$ are aria $24\sqrt{3}$ cm^2 și măsura unghiului A de 60°. Lungimea diagonalei AC este egală cu ... cm.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$.
a) Stabiliți proiecțiile catetelor pe ipotenuză.
b) Dacă $BC = 35$ cm, determinați lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,(3).

22. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, ipotenuza $[BC]$ are lungimea de 12 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

23. Într-un triunghi dreptunghic lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză este de 3 ori mai mare decât lungimea proiecției celeilalte catete pe ipotenuză. Dacă ipotenuza are 16 cm, calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

24. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile 3 cm și 6 cm.
a) Calculați perimetrul triunghiului.
b) Calculați aria triunghiului.

25. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), se consideră $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și $DM \perp AB$, $M \in (AB)$. Se cunosc $BC = 20$ cm și $BM = 5$ cm.
a) Calculați perimetrul triunghiului ABD.
b) Calculați aria triunghiului ABC.

26. În rombul $ABCD$ se consideră $AC \cap BD = \{O\}$ și $OM \perp AB$, $M \in (AB)$. Se cunosc $AM = 3,6$ cm și $MB = 6,4$ cm.
a) Calculați OM.
b) Calculați aria rombului $ABCD$.

27. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD = BC$. Se știe că $BD \perp BC$, $AB = 8$ cm și $DC = 16$ cm.
a) Determinați lungimea înălțimii trapezului.
b) Calculați perimetrul trapezului.

28. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se știe că înălțimea $AD = 12$ cm și $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{9}{16}$.
Determinați perimetrul triunghiului.

29. În triunghiul dreptunghic ABC, fie M mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Se știe că $m(\widehat{B}) = 60°$ și $AM = 6$ cm.
a) Calculați lungimea ipotenuzei $[BC]$.
b) Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

30. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar $AB = 8$ cm și $BC = 10$ cm.
a) Calculați AC.
b) Aflați lungimea bisectoarei unghiului C.

31. În triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 6$ cm, medianele AM și BN fac un unghi de 30°.
a) Arătați că $AM = 9\sqrt{3}$ cm.
b) Calculați perimetrul triunghiului.

32. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 25$ cm.
a) Stabiliți natura triunghiului ABC.
b) Calculați sinusul unghiului B.
c) Calculați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

33. În dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) se consideră $AM \perp BD$, $M \in (BD)$. Se știe că $DM = 2\sqrt{2}$ cm și $MB = 4\sqrt{2}$ cm.
a) Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.
b) Calculați raportul dintre ariile triunghiurilor AMD și AMB.

34. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se știe că $\text{tg}B = \dfrac{3}{4}$ și $BC = 15$ cm.
a) Calculați perimetrul triunghiului ABC
b) Calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului B.

35. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $DB = 9$ cm și $\text{tg}B = \dfrac{2}{3}$.
a) Determinați lungimile laturilor triunghiului;

b) Calculați $\sin C + \cos C$.

36. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle EAC) = 90°$, se consideră înălțimea AD, $D \in (BC)$. Se cunosc $BC = 16$ cm și $CD = 4$ cm.
a) Calculați aria triunghiului ABC.
b) Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
c) Determinați lungimea bisectoarei din C a triunghiului ABC.

37. În exteriorul rombului $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ se construiesc pătratele $ABEF$ și $BCMN$.
a) Calculați aria rombului $ABCD$.
b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle EBN$.
c) Determinați aria poligonului $ADCMNEF$.

38. Laturile unui triunghi au lungimile $x, x+1$ și $x+2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, x este exprimat în m.
a) Calculați aria triunghiului dacă $x = 7$ m.
b) Determinați valoarea lui x astfel încât triunghiul să fie dreptunghic.

39. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile $x+2$ și $x+4$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, x este exprimat în cm.
a) Calculați lungimea ipotenuzei dacă $x = 4$ cm.
b) Determinați valoarea lui x astfel încât aria triunghiului să fie egală cu 7,5 cm^2.

40. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $FC = EC = \frac{1}{3}BC$.
a) Calculați aria triunghiului AEF.
b) Aflați distanța de la punctul E la latura AF.

41. O clădire are înălțimea de 20 m și o scară are lungimea de 25 m. Scara trebuie pusă pe sol pentru ca al doilea capăt al ei să ajungă la acoperiș fără a-l depăși.
a) Calculați distanța pe sol față de clădire la care a fost pusă scara.
b) Cristi urcă pe scară parcurgând la fiecare 15 secunde 2,5 m. După cât timp ajunge Cristi la capătul scării ?

42. O tablă de oțel în formă de pătrat cu latura de 120 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Calculați cantitatea de vopsea necesară, știind că pentru 45 cm^2 se consumă 3 g de vopsea.

43. Lungimea pasului lui Vlad este de 8 dm și el face 150 de pași pe minut. Vlad parcurge diagonala pieței publice din orașul său, care are forma unui pătrat, în 40 de secunde.
a) Calculați viteza lui Vlad, exprimată în metri pe secundă.
b) Determinați aria pieței.
c) Pentru pavarea pieței se folosesc dale dreptunghiulare, de dimensiuni 25 cm ×80 cm. Calculați numărul de dale necesare.

44. Un teren are forma unui triunghi isoscel ABC. Se știe că $AB = AC = 25$ m, iar $BC = 40$ m.
a) Arătați că suprafața terenului este egală cu 3 ari.
b) Se împarte terenul în două parcele, astfel: se aleg două puncte $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$, astfel încât $DE \parallel BC$ și $DE = 10$ m. Calculați aria parcelei ADE.
c) Calculați perimetrul gardului ce va înconjura parcela $DECB$.

45. Un teren are formă de pătrat cu diagonala de 30 m.

a) Aflați suprafața terenului.
b) Se înconjoară terenul cu gard de sârmă. Știind că 1 m liniar de gard costă 40 lei, iar pe o latură a terenului se găsește o poartă lată de 1 m, care costă 200 lei, stabiliți dacă pentru împrejmuire sunt suficienți 300 lei. ($\sqrt{2} = 1,41$).

46. O cameră de formă dreptunghiulară are dimensiunile exprimate în metri prin numere naturale proporționale cu 2 și 3 și având media geometrică $2\sqrt{6}$.
a) Aflați dimensiunile camerei.
b) Un covor ocupă 40% din suprafața camerei. Calculați suprafața rămasă neacoperită.
c) Un cablu TV este instalat prin podea, pe diagonala camerei. Stabiliți dacă 7 m de cablu sunt suficienți.

47. O scară având lungimea de 100 dm este sprijinită de un perete. Distanța pe sol dintre piciorul scării și perete este de 60 dm. Mihai se urcă pe scară, până la o un sfert din lungimea ei.
a) La ce înălțime față de sol se află capătul de sus al scării?
b) La ce distanță față de sol se află Mihai?
c) Câți metri trebuie să mai urce Mihai pe scară, pentru a ajunge la o distanță față de sol de 5 m?

48. O piesă de puzzle are forma unui pătrat $ABCD$ cu latura de 12 cm. Piesa este colorată jumătate cu roșu (corespunzător triunghiului ABD). Pe latura $[AB]$ se consideră punctul M, astfel încât $AB = 4MB$. Suprafața corespunzătoare triunghiului DBM este colorată cu albastru, iar restul piesei este alb.
a) Calculați lungimea segmentului $[DM]$.
b) Calculați aria suprafeței colorate cu roșu.
c) Aflați cât la sută din aria suprafeței colorate cu roșu reprezintă aria suprafeței colorate cu albastru.

49. O placă de gresie are forma unui romb cu latura de 16 cm și aria de $64\sqrt{3}$ cm^2.
a) Arătați că diagonala mică a plăcii este egală cu 16 cm.
b) Stabiliți dacă 150 bucăți de gresie de această formă ar fi suficiente pentru a acoperi podeaua unei băi dreptunghiulare cu dimensiunile de 1,5 m și 2,5 m.($\sqrt{3} = 1,73$)

50. O cameră are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, având bazele $[AB]$ și $[CD]$ de lungimi 10 m, respectiv 14 m și $m(\sphericalangle C) = 60°$.
a) Calculați suprafața camerei.
b) Stabiliți numărul minim de metri pătrați de parchet ce trebuie cumpărat pentru parchetarea întregii suprafețe a camerei. (se poate cumpăra doar număr întreg de metri pătrați de parchet)
c) Cât costă parchetul necesar dacă prețul este de 50 lei/m^2, dar se acordă o reducere de 15% pentru toată cantitatea cumpărată, oricărei persoane ce achiziționează minim 40 m^2 ?

Tema 2.5
Cercul

Elemente în cerc. Coardă, arc, unghi la centru

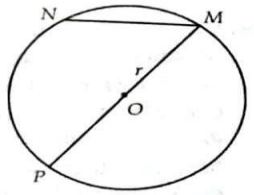
Fiind dat un punct în plan O și un număr real pozitiv r, se numește *cerc* de centru O și rază r mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O.

Altfel zis, cercul este mulțimea punctelor egal depărtate de un punct fix (centrul).

Notăm cercul de centru O și rază r astfel: $\mathcal{C}(O,r)=\{M\in\mathcal{P}\mid OM=r\}$.

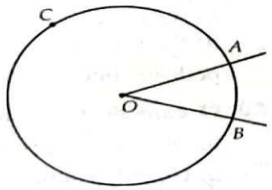
În anumite situații, prin *rază* vom înțelege și segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește *coardă*. O coardă care conține centrul cercului se numește *diametru*. Lungimea oricărui diametru este $2r$. Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc *puncte diametral opuse*.

Două cercuri sunt congruente dacă au razele egale. Scriem $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)\equiv\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$ dacă și numai dacă $r_1=r_2$.



În figura alăturată, segmentul $[MN]$ este coardă, iar $[MP]$ este diametru. Segmentele $[OM]$, $[ON]$ și $[OP]$ sunt raze. Avem $OM=ON=OP=r$ și $MP=2r$.

Arc de cerc. Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește *arc de cerc*, iar punctele care determină arcul se numesc capetele (extremitățile) arcului. Dacă extremitățile unui arc de cerc sunt puncte diametral opuse, arcul se numește *semicerc*.



Două puncte $A,B\in\mathcal{C}(O,r)$, nediametral opuse, determină pe un cerc două arce: *arcul mic* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc aflată în interiorul unghiului AOB) și *arcul mare* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc din exteriorul unghiului AOB). În general, când scriem $\overset{\frown}{AB}$ (folosind doar două litere), ne referim la arcul mic. Pentru notația unui arc mare vom folosi încă un punct al arcului, diferit de capetele lui: de exemplu, vom nota $\overset{\frown}{ACB}$ arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ din figură.

Unghi la centru. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește unghi la centru. În figura de mai sus, $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru.

Măsura unui arc mic de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător: $m(\overset{\frown}{AB})=m(\sphericalangle AOB)$. Măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este $m(\overset{\frown}{ACB})=360°-\ -m(\overset{\frown}{AOB})$. Măsura unui diametru este 180°, iar măsura unui cerc este de 360°.

Două arce sunt congruente dacă și numai dacă au aceeași măsură. Notăm $\overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{CD}$.

Teorema 1 (referitoare la arce și coarde congruente în cerc)
Într-un cerc sau în cercuri congruente, coardelor congruente le corespund arce congruente, și reciproc.

Altfel spus, două coarde pe un cerc sunt congruente dacă și numai dacă arcele corespunzătoare lor sunt congruente: $[AB]\equiv[CD]$ *dacă și numai dacă* $\overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{CD}$.

Teorema 2 (referitoare la diametrul perpendicular pe o coardă)
Într-un cerc, un diametru perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și determină, pe fiecare dintre arcele subîntinse de coardă, arce congruente.

Cu alte cuvinte, dacă $[MN]$ este diametru în cercul $\mathcal{C}(O,r)$, iar $A,B\in\mathcal{C}(O,r)$ astfel încât $MN\perp AB$ și $MN\cap AB=\{E\}$, atunci $[AE]\equiv[BE]$, $\overset{\frown}{AM}\equiv\overset{\frown}{BM}$ și $\overset{\frown}{AN}\equiv\overset{\frown}{BN}$.

Teorema 3 (referitoare la arce cuprinse între coarde paralele)
Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente: dacă $AB\parallel CD$, *atunci* $\overset{\frown}{AD}\equiv\overset{\frown}{BC}$.

Teorema 4 (referitoare la coarde egal depărtate de centru)
Într-un cerc, două coarde sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centru: $[AB]\equiv[CD]$ *dacă și numai dacă* $d(O,AB)=d(O,CD)$.

Observație. Teorema 4 este valabilă și pentru coarde situate în cercuri congruente $\mathcal{C}(O,r)\equiv\mathcal{C}'(O',r)$: $[AB]\equiv[CD]$ dacă și numai dacă $d(O,AB)=d(O',CD)$.

Unghi, triunghi și patrulater înscris în cerc

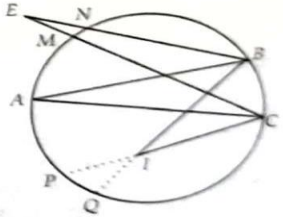
Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi includ două coarde ale cercului se numește *unghi înscris în cerc*.

Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenței măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.

Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este semisuma arcelor cuprinse între laturile unghiului și prelungirile laturilor lui.

În figura alăturată, $A,B,C\in\mathcal{C}(O,r)$, $E\in\operatorname{Ext}\mathcal{C}(O,r)$ și $I\in\operatorname{Int}\mathcal{C}(O,r)$. Unghiul $\sphericalangle BAC$ este înscris în cerc, $\sphericalangle BEC$ este unghi cu vârful în exteriorul cercului, iar $\sphericalangle BIC$ este unghi cu vârful în interiorul cercului. Măsurile lor sunt:



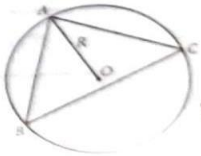
$$m(\sphericalangle BAC)=\frac{1}{2}\cdot m(\overset{\frown}{BC});$$

$$m(\sphericalangle BEC)=\frac{1}{2}\cdot\left[m(\overset{\frown}{BC})-m(\overset{\frown}{MN})\right];$$

$$m(\sphericalangle BIC)=\frac{1}{2}\cdot\left[m(\overset{\frown}{BC})+m(\overset{\frown}{PQ})\right].$$

Observații:
1. Orice unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept.
2. Două unghiuri înscrise în cerc care subîntind același arc sunt congruente.

Triunghi înscris în cerc. Spunem că un *triunghi* este *înscris într-un cerc* dacă vârfurile sale aparțin cercului. În acest caz, spunem că cercul este *circumscris* triunghiului.



În figura alăturată, triunghiul ABC este *înscris* în cercul $C(O,R)$ și cercul este *circumscris* triunghiului. Dacă S este aria triunghiului și $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, avem relația $abc=4RS$.

Centrul cercului circumscris unui triunghi se află la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.

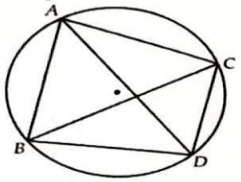
Un patrulater cu vârfurile pe un cerc se numește *patrulater înscris în cerc*, iar despre cerc vom spun că este *circumscris* patrulaterului. Orice patrulater înscris într-un cerc este patrulater convex.

Patru puncte se numesc *conciclice* dacă se află pe un același cerc.

Un patrulater se numește *inscriptibil* dacă vârfurile sale sunt conciclice. Altfel spus, un patrulater este inscriptibil dacă poate fi înscris într-un cerc.

Teorema 5 (referitoare la unghiurile opuse ale unui patrulater înscris)
Unghiurile opuse ale unui patrulater înscris într-un cerc sunt suplementare.

Teorema 6 (referitoare la unghiuri formate de diagonale cu laturi opuse)
Într-un patrulater înscris în cerc, unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.



În figura alăturată, $ABCD$ este un patrulater înscris în cerc. Au loc relațiile:

$$m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle C)=180^\circ \text{ și } m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle D)=180^\circ;$$

$$\overset{\frown}{BAC}\equiv\overset{\frown}{BDC},\ \overset{\frown}{DAC}\equiv\overset{\frown}{BDC},\ \overset{\frown}{ABD}\equiv\overset{\frown}{ACD},\ \overset{\frown}{DBC}\equiv\overset{\frown}{DAC}.$$

Observație. Au loc și reciprocele teoremelor 5 și 6, în sensul că:

RT5. Un patrulater cu două unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.

RT6. Un patrulater în care unghiul format de o latură cu o diagonală este congruent cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală este inscriptibil.

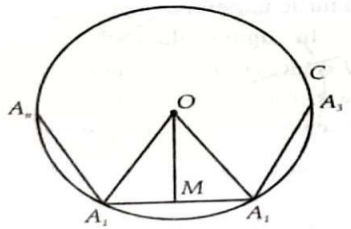
Poligoane regulate

Un poligon convex cu toate laturile congruente și cu toate unghiurile congruente se numește *poligon regulat*.

Împărțind un cerc în $n\geq 3$ arce congruente și unind punctele de diviziune consecutive, se obține un poligon regulat cu n laturi.

Orice poligon regulat este înscris într-un cerc și este circumscris unui cerc, aceste două cercuri fiind concentrice. Centrul comun se numește *centrul poligonului*.

Distanța de la centrul poligonului regulat la fiecare dintre laturi se numește *apotemă*. Raza cercului înscris în poligonul regulat este egală cu apotema poligonului.



Pentru un poligon regulat cu n laturi, folosim notațiile: u_n – măsura unui unghi, l_n – lungimea laturii, a_n – lungimea apotemei, P_n – perimetrul și A_n – aria.

Pentru un poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $C(O,R)$ avem:

$u_n=\dfrac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$	$l_n=2R\sin\dfrac{180^0}{n}$	$a_n=R\cos\dfrac{180^0}{n}$
$P_n=n\cdot l_n=2nR\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$A_n=\dfrac{P_n\cdot a_n}{2}=nR^2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	

Elementele poligoanelor regulate cu 3, 4 și 6 laturi

Triunghiul echilateral: $l_3=R\sqrt{3}$; $a_3=\dfrac{R}{2}$; $P_3=3l_3=3R\sqrt{3}$; $A_3=\dfrac{l_3^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

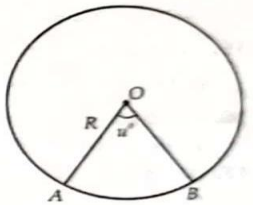
Pătratul: $l_4=R\sqrt{2}$; $a_4=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $P_4=4l_4=4R\sqrt{2}$; $A_4=l_4^2=2R^2$.

Hexagonul regulat: $l_6=R$; $a_6=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $P_6=6l_6=6R$; $A_6=\dfrac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Lungimi și arii în cerc

Lungimea cercului și aria discului de rază r se calculează cu formulele:

$$L_{cerc}=2\pi r,\qquad A_{disc}=\pi r^2.$$



Sectorul circular este porțiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale. Lungimea unui arc de cerc de măsură u° și aria sectorului circular corespunzător se calculează cu formulele:

$$L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi r\cdot u^0}{180^0},\qquad A_{sector}=\frac{\pi r^2\cdot u^0}{360^0}.$$

Segmentul circular este porțiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc și coarda care subîntinde acel arc. Aria segmentului circular corespunzător unui arc de măsură u° este: $\mathcal{A}_{segment}=\left(\dfrac{\pi\cdot u^\circ}{360^\circ}-\dfrac{\sin u^\circ}{2}\right)r^2$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Punctele A și B se află pe un cerc de centru O și rază 6 cm. Știind că $AB=6$ cm, măsura unghiului AOB este … .
2. Punctele A și B sunt pe un cerc de centru O și rază $10\sqrt{2}$ cm. Știind că $AB=20$ cm, măsura unghiului AOB este … .
3. Dacă M și N sunt două puncte pe un cerc de centru O, rază 10 cm și $MN=10$ cm, atunci aria triunghiului OMN este … .
4. Punctele A, B, C sunt pe un cerc de rază 5 cm. Știind că $AB=BC=5$ cm, măsura unghiului BAC este … .
5. Centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare se află la intersecția … .
6. Centrul cercului înscris într-un triunghi oarecare se află la intersecția … .
7. Dacă centrul de greutate al unui triunghi coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului, atunci triunghiul este … .
8. Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6 cm are lungimea de … .
9. Raza cercului înscris într-un triunghi echilateral cu latura de lungime 12 cm are lungimea de … .

10. Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor egale cu 8 cm respectiv cu 6 cm. Atunci raza cercului circumscris triunghiului are lungimea de ... .

11. Un pătrat are lungimea razei cercului circumscris egală cu 10 cm. Lungimea laturii pătratului este ... .

12. Un hexagon regulat are lungimea unei diagonale mari egală cu 30 cm. Aria cercului circumscris hexagonului este egală cu ... .

13. Un romb are latura de lungime 6 cm și un unghi cu măsura de 60°. Lungimea razei cercului înscris în romb este ... .

14. Punctul A se află în afara cercului de centru O și rază de lungime 8 cm. Știind că $AO = 10$ cm, lungimea tangentei din A la cerc este ... .

15. Avem două cercuri de centre O_1 și respectiv O_2. Știind că $O_2O_1 = 15$ cm, $R_1 = 10$ cm și $R_2 = 5$ cm, lungimea tangentei comune la cele două cercuri este egală cu ... .

16. Știind că A și B sunt două puncte pe un cerc de rază 8 cm și că $BA = 8$, lungimea arcului mic delimitat de punctele B și A este ... .

17. Un pătrat are latura de lungime 6 cm. Porțiunea aflată între pătrat și cercul înscris în pătrat are aria egală cu ... .

18. Lungimea cercului circumscris unui triunghi echilateral, cu latura de lungime 10 cm, este egală cu ... .

19. Un triunghi echilateral are lungimea razei cercului înscris egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Lungimea laturii triunghiului este egală cu ... .

20. Lungimea razei cercului înscris într-un hexagon regulat este $\sqrt{3}$ cm. Aria discului reprezentat de cercul circumscris hexagonului este egală cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Punctele A și B se află pe un cerc de centru O și rază 25 cm. Știind că $AB = 30$ cm, determinați distanța de la O la AB.

22. Punctele A, B, C se află pe un cerc de centru O și rază 20 cm. Știind că triunghiul ABC este echilateral, determinați măsura unghiului ABO.

23. Punctele A, B, C și D se află pe un cerc de centru O și rază 10 cm. Știind că $ABCD$ este un pătrat, determinați:
a) Lungimea laturii pătratului;
b) Lungimea razei cercului înscris în pătrat.

24. Un hexagon regulat are lungimea laturii egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Determinați:
a) Lungimea diametrului cercului circumscris hexagonului dat.
b) Lungimea diagonalei scurte a hexagonului.

25. Determinați raza cercului înscris într-un romb de latură 10 cm și cu măsura unghiului ascuțit egală cu 60°.

26. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6 cm respectiv 8 cm. Determinați:.
a) Raza cercului circumscris triunghiului dat;
b) Lungimea cercului înscris triunghiului.

27. Un dreptunghi are lungimea de 12 cm, lățimea de 9 cm și centrul în O.
a) Determinați raza cercului circumscris dreptunghiului.
b) Calculați raza cercului înscris în triunghiul determinat de O și extremitățile uneia din lungimile dreptunghiului.

28. Laturile unui trapez isoscel sunt tangente la un cerc (trapez circumscriptibil). Știind că lungimile bazelor sunt de 48 cm respectiv de 12 cm, determinați:
a) Raza cercului înscris în trapez;
b) Aria și perimetrul trapezului.

29. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC și raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 13$ cm.

30. Se dau două cercuri tangente exterior de raze 10 cm respectiv x cm. Determinați x, știind că lungimea tangentei exterioare este egală cu $4\sqrt{5}$ cm.

31. Două cercuri secante au lungimile razelor de 11 cm, respectiv de 6 cm. Determinați lungimea coardei comune știind că lungimea tangentei comune este de 12 cm.

32. Determinați lungimea razei cercului circumscris unui trapez isoscel $ABCD$, de baze AB și CD, cu $AB = 12$ cm și $BC = CD = DA = 6$ cm.

33. Se dă un cerc de centru O și un punct A astfel încât $AO = 25$ cm și lungimea tangentelor din A la cercul dat este egală cu 20 cm. Determinați lungimea razei cercului și distanța între cele două puncte de tangență.

34. Un trapez isoscel are lungimile bazelor egale cu 16 cm respectiv cu 4 cm iar laturile neparalele au lungimea egală cu 10 cm.
a) Arătați că trapezul poate fi circumscris unui cerc.
b) Calculați raza cercului înscris în trapezul dat.

35. O piesă metalică cu secțiunea pătrat (prismă patrulateră regulată) trebuie strunjită astfel încât să obținem secțiune circulară (cilindru).Știind că lungimea diagonalei pătratului este de $10\sqrt{2}$ cm, determinați cel mai mare diametru al piesei finale.

36. Dintr-un cilindru plin trebuie să formăm o piesă cu secțiunea pătrat. Știind că diametrul cilindrului este de 10 cm, determinați cea mai mare lungime posibilă pentru latura pătratului.

37. Pe o monedă cu diametrul de $10\sqrt{3}$ mm, trebuie gravat un triunghi echilateral cât mai mare posibil iar apoi, în interiorul triunghiului echilateral se gravează cel mai mare cerc posibil. Determinați lungimea laturii triunghiului și diametrul cercului gravat.

38. Dintr-un copac (considerat cilindru) trebuie obținută o grindă de susținere a unui acoperiș. Ce diametru trebuie să aibă copacul pentru ca grinda să aibă secțiunea un pătrat cu latura de 15 cm?

39. Două roți zimțate sunt legate prin intermediul unei curele de transmisie. Știind că diametrele celor două roți sunt de 6 cm respectiv de 36 cm și distanța dintre centrele celor două roți este de 50 de cm, determinați lungimea părții din curea care nu se sprijină pe cele două roți.

40. În cercul de centru O și rază 10 cm, diametrul $[AD]$ este perpendicular pe coarda $[BC]$. Distanța de la A la dreapta BC este de 2 cm. Aflați perimetrul și aria patrulaterului de vârfuri A, B, C, D.

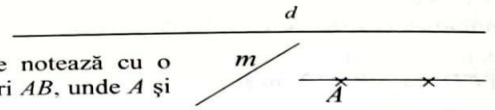
Tema 2.6

Incidenţă, paralelism şi perpendicularitate în spaţiu

Elementele fundamentale ale geometriei în spaţiu sunt: *punctul*, *dreapta*, *planul*. Acestea nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul este cea mai simplă figură geometrică. El se marchează cu • sau × şi se notează : • A sau • B sau × C.

Dreapta este formată din puncte. Dreapta este *nemărginită* (infinită) . Se notează cu o literă mică d sau m,sau cu două litere mari AB, unde A şi B sunt două puncte ale acestei drepte.



Planul. Planul este nelimitat în toate direcţiile. În geometrie vom reprezenta porţiuni de plane prin câte un paralelogram sau triunghi. Se notează cu o literă grecească α, β, γ, π etc., sau prin trei litere mari puse în paranteză rotundă (ABC) unde A, B şi C sunt trei puncte necoliniare ale acelui plan.

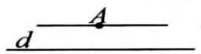


Propoziţii despre elementele fundamentale ale geometriei în spaţiu

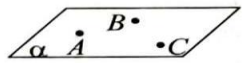
1. Prin două puncte distincte A şi B trece o dreaptă şi numai una.
   Notăm $d = AB$.



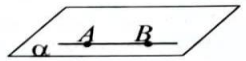
2. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce o paralelă şi numai una la dreapta dată.



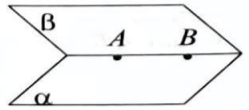
3. Există un plan şi numai unul care conţine trei puncte necoliniare A, B şi C.
   Notăm $\alpha = (ABC)$.



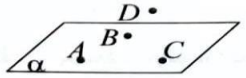
4. Dacă două puncte distincte A şi B ale unei drepte aparţin unui plan α , atunci dreapta are toate punctele conţinute în acel plan.
   Notăm $AB \subset \alpha$.



5. Dacă două plane distincte α şi β au un punct comun A, atunci ele mai au cel puţin încă un punct comun B (adică planele au comun dreapta AB).
   Notăm $AB \subset \alpha \cap \beta$.

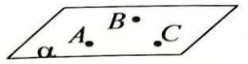


6. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan. Punctele A, B, C şi D sunt *necoplanare*.

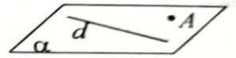


Determinarea planului. Un plan este *unic determinat* de:

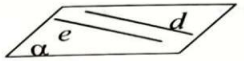
A. trei puncte necoliniare
Notăm $\alpha = (ABC)$.



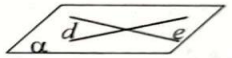
B. o dreaptă şi un punct exterior;
Notăm $\alpha = (d; A)$



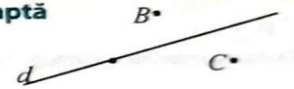
C. două drepte paralele;
Notăm $\alpha = (d;e)$.



D. două drepte concurente;
Notăm $\alpha = (d;e)$.



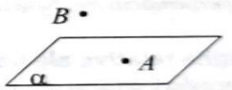
Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă



a. Punctul ***aparţine*** dreptei.
Exemplu. $A \in d$.

b. Punctul ***nu aparţine*** dreptei (este *exterior* dreptei).
Exemple. $B \notin d$, $C \notin d$.

Poziţiile relative ale unui punct faţă de un plan



a. Punctul ***aparţine*** planului (este *situat* în plan).
Exemplu. $A \in \alpha$.

b. Punctul ***nu aparţine*** planului (este *exterior* planului).
Exemplu. $B \notin \alpha$.

Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

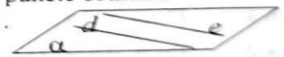
a. Două drepte sunt ***identice*** (*confundate* sau *coincid*) dacă au două puncte comune.
Exemplu: Dacă $d \subset e$ şi $e \subset d$, atunci $d = e$.



b. Două drepte sunt ***concurente*** dacă au un punct comun.
Exemplu: $d \cap e = \{O\}$.



c. Două drepte sunt ***paralele*** dacă sunt coplanare şi nu au puncte comune.
Exemplu: $d \subset \alpha$, $e \subset \alpha$ şi $d \cap e = \varnothing$, atunci $d \parallel e$.



d. Două drepte sunt ***necoplanare*** dacă nu sunt concurente şi nu sunt paralele.
Exemplu: $d \cap e = \varnothing$ şi d , e



Observaţii.

1. Fie dreptele a, b şi c. Dacă $a \parallel b$ şi $b \parallel c$, atunci $a = c$ sau $a \parallel c$ (*proprietatea de tranzitivitate* a relaţiei de paralelism).
2. Două drepte sunt ***coplanare*** dacă şi numai dacă sunt paralele sau concurente.

Unghiul a două drepte în spaţiu

Unghiul a două drepte situate în acelaşi plan. Se consideră două drepte a şi b *concurente* în punctul O. Cele două drepte determină două perechi de unghiuri opuse la vârf cu măsurile egale cu v°, respectiv $180^\circ - v^\circ$.

Definim *măsura unghiului dreptelor* a şi b ca fiind $m(\widehat{a,b}) = \min(v^\circ, 180^\circ - v^\circ)$.

Observaţii.

1. Dacă $a = b$ sau $a \parallel b$, atunci $m(\widehat{a;b}) = 0^\circ$;
2. Dacă a, b, c şi d sunt drepte astfel încât $a \cap b \neq \varnothing$, $c \cap d \neq \varnothing$, $a \parallel c$ şi $b \parallel d$, atunci $m(\widehat{a;b}) = m(\widehat{c;d})$ (consecinţă a *teoremei unghiurilor cu laturile respectiv paralele*).

Unghiul a două drepte necoplanare.

Fie două *drepte necoplanare* a şi d şi punctul M în spaţiu. Dreptele a' şi b' sunt astfel încât $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ şi $a' \cap b' = \{M\}$.



Definim *măsura unghiului dreptelor* a şi b ca fiind:

$$m(\widehat{a;b}) \overset{def}{=} m(\widehat{a';b'})$$

Definiţie. Dacă a şi b sunt două drepte astfel încât $m(\widehat{a;b}) = 90^\circ$, atunci dreptele se numesc *perpendiculare*. Notăm $a \perp b$.

Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan

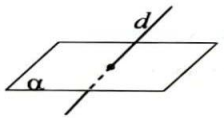
Se consideră dreapta d şi planul α. Poziţia dreptei d relativ la planul α poate fi:

inclusă în planul α:



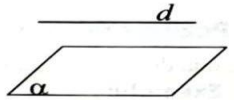
Notăm: $d \subset \alpha$

secantă planului α:



Notăm: $d \cap \alpha = \{A\}$

paralelă cu planul α:



Notăm: $d \cap \alpha = \varnothing$ sau $d \parallel \alpha$

Condiţie suficientă de paralelism a unei drepte cu un plan. Fie o dreaptă d şi un plan α, $d \not\subset \alpha$. Dacă există o dreaptă e, $e \subset \alpha$, astfel încât $d \parallel e$, atunci $d \parallel \alpha$.

Teorema 1. Dacă $d \parallel \alpha$, $d \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = e$, atunci $e \parallel d$ (vezi **Figura 1.**)

Teorema 2. Dacă $d \parallel \alpha$, $M \in \alpha$, $M \in e$, $e \parallel d$, atunci $e \subset \alpha$ (vezi **Figura 2.**)

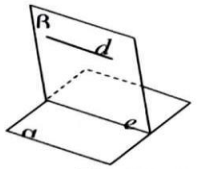


Figura 1.

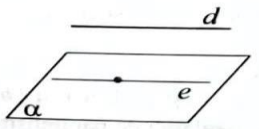


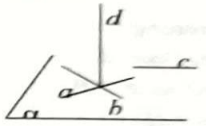
Figura 2.

Dreaptă perpendiculară pe un plan. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe toate dreptele incluse într-un plan α, atunci dreapta d se numeşte *dreaptă perpendiculară* pe planul α. Notăm $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$.

Condiţie suficientă de perpendicularitate a unei drepte pe un plan

Dreapta d este perpendiculară pe planul α dacă d este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul α. Cu alte cuvinte:

Dacă $\begin{cases} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b \neq \varnothing \\ d \perp a,\ d \perp b \end{cases}$, atunci $d \perp \alpha$.



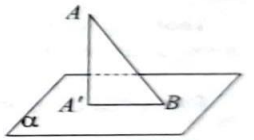
Consecinţă. Fie a şi b două drepte concurente şi o dreapta d, $d \perp (a;b)$.
Dacă dreapta c este inclusă în planul $(a; b)$, atunci $d \perp c$.

Teoremă. Dacă d este o dreaptă şi A este un punct în spaţiu, atunci există un unic plan α care conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d.

Teoremă. Dacă α este un plan şi A este un punct în spaţiu, atunci există o unică dreaptă d care conţine punctul A şi este perpendiculară pe planul α.

Definiţie. Dreptele care conţin punctul A, diferite de perpendiculara prin A pe planul α, se numesc ***oblice*** în raport cu α.

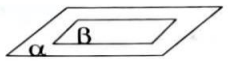
Distanţa de la un punct la un plan. Fie α este un plan, A un punct în spaţiu şi A' piciorul perpendicularei din A planul α. Lungimea segmentului AA' se numeşte *distanţa* de la punctul A la planul α. Notăm $d(A;\alpha) = AA'$.



Observaţie. Dacă punctul A exterior planului α, dreapta AA', $A' \in \alpha$, este perpendiculara pe planul α, iar dreapta AB $B \in \alpha$, este o oblică oarecare, atunci $AB > AA'$.

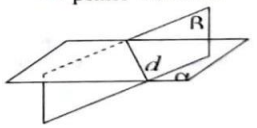
Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele.

A. plane care *coincid*



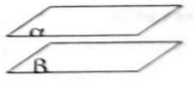
notăm $\alpha = \beta$

B. plane *secante*



notăm $\alpha \cap \beta = d$

C. plane *paralele*



$\alpha \cap \beta = \varnothing$
notăm $\alpha \parallel \beta$

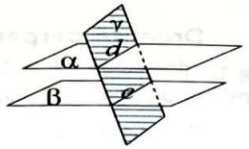
Observaţie. Dacă $\alpha \subset \beta$ şi $\beta \subset \alpha$, atunci $\alpha = \beta$.

Lemă. Fie planele α şi β şi dreptele a şi b, $a \subset \alpha$ şi $b \subset \beta$. Dacă $a \parallel b$ şi $\alpha \cap \beta = d$, atunci $a \parallel d \parallel b$.

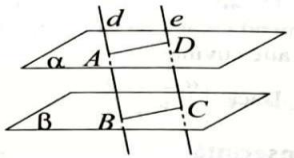
Condiţie suficientă de paralelism a două plane

Două plane sunt paralele dacă unul dintre ele conţine două drepte concurente paralele cu cel de-al doilea plan.

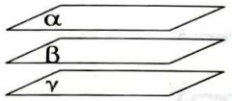
Teoreme de paralelism



Teoremă. Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\alpha \cap \gamma = d$, atunci există dreapta e astfel încât $\beta \cap \gamma = e$, iar $d \parallel e$.



Teoremă. Fie planele paralele α, β şi dreptele paralele d şi e. Dacă $d \cap \alpha = \{A\}$, atunci există punctele B, C şi D astfel încât $\{B\} = d \cap \beta$, $\{D\} = e \cap \alpha$ şi $\{C\} = e \cap \beta$. În plus, $[AB] \equiv [DC]$.
(Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.)



Teoremă (tranzitivitatea relaţiei de paralelism)
Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\beta \parallel \gamma$, atunci $\gamma \parallel \alpha$
(două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele).

Teoremă. Fie α şi β două plane paralele şi punctele $A \in \alpha$, $B \in \beta$.
Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $AB \perp \beta$.

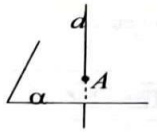
În condiţiile teoremei de mai sus, lungimea segmentului AB se numeşte *distanţa dintre planele* α şi β. Notăm $AB = d(\alpha;\beta)$.

Teorema lui Thales în spaţiu. Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, pe care le intersectează, segmente proporţionale.

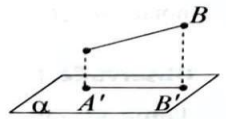
Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan

Proiecţia unui punct. Dacă punctul B este exterior planului α, atunci proiecţia punctului B pe planul α este piciorul perpendicularei duse din punctul B pe planul α.

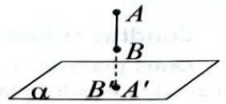
Dacă $\begin{cases} B \notin \alpha \\ BB' \perp \alpha \\ B' \in \alpha \end{cases}$, atunci notăm $B' = \text{pr}_\alpha B$.



Observaţie. Dacă punctul A aparţine planului α, atunci proiecţia punctului A pe planul α coincide cu punctul A: dacă $A \in \alpha$, atunci $A = \text{pr}_\alpha A$.



Proiecţia unui segment: Proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α este segmentul $[A'B']$ ale cărui extremităţi sunt proiecţiile pe planul α ale extremităţilor segmentului dat.
Notăm: $\text{pr}_\alpha[AB] = [\text{pr}_\alpha A \ \text{pr}_\alpha B] = [A'B']$.

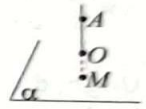


Observaţie: Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul α, atunci proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α se reduce la un punct.

Proiecţia unei drepte. Proiecţia unei drepte d pe planul α este dreapta determinată de proiecţiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d. Notăm: $e = \text{pr}_\alpha d$

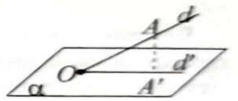


Observaţie. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α atunci proiecţia dreptei d pe planul α este un punct.
Dacă $AO \perp \alpha$ şi $AO \cap \alpha = \{M\}$, atunci $\{M\} = \text{pr}_\alpha AO$.



Definiţie. În general, proiecţia figurii geometrice plane F pe planul α este figura geometrică F' formată din reuniunea proiecţiilor punctelor figurii F pe planul α.

Unghiul unei drepte cu un plan. Unghiul dreptei d cu planul α este unghiul format de dreapta d cu proiecţia ei pe α.
Dacă $d' = \text{pr}_\alpha d$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = m(\widehat{d;d'})$.



Observaţii. 1. Dacă $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 0°$.

2. Dacă $d \perp \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 90°$.

Lungimea proiecţiei unui segment pe o dreaptă. Se consideră un segment $[AB]$ şi o dreaptă d. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_d[AB]$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;d})$.

Observaţie. Dacă $AB \parallel d$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp d$, atunci $A'B' = 0$.

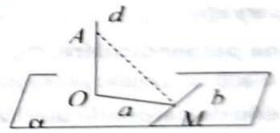
Lungimea proiecţiei unui segment pe un plan. Se consideră un segment $[AB]$ şi un plan α. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_\alpha[AB]$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;\alpha})$.

Observaţie. Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp \alpha$, atunci $A'B' = 0$.

Teorema celor trei perpendiculare (T 3 ⊥)

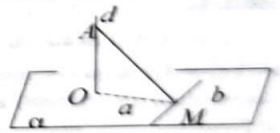
Teorema celor trei perpendiculare

Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}, A \in \alpha \\ b \subset \alpha \\ OM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $AM \perp b$.



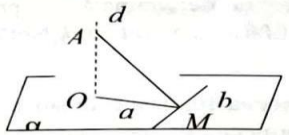
Reciproca întâi a teoremei celor trei perpendiculare (R_1 .T.3)

Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ A \in \alpha, b \subset \alpha, \\ AM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $OM \perp b$.



Reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare (R_2.T.3 $\perp$)

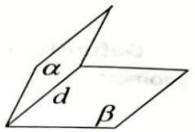
Dacă $\begin{cases} a,b \subset \alpha \\ a \perp b, a \cap b = \{M\} \\ AM \perp b, A \notin \alpha \\ AO \perp a, O \in a \end{cases}$, atunci $AO \perp \alpha$.



Unghi diedru. Plane perpendiculare

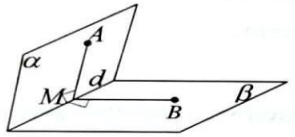
Unghiul diedru este configurația formată din două semiplane conținute în plane diferite, care sunt delimitate de aceeași dreaptă.

În figura alăturată, dreapta d determină în planele α și β două semiplane s_1 și s_2. Ele formează unghiul diedru notat $(\widehat{s_1;s_2})$. Semiplanele s_1 și s_2 se numesc *fețele diedrului*, iar dreapta d se numește *muchia diedrului*.



Definiție: Unghiul format de două perpendiculare pe muchia unui diedru, conținute respectiv în fețele diedrului și concurente într-un punct al muchiei diedrului se numește *unghi plan corespunzător diedrului*.

Dacă $\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ M \in d \\ A \in \alpha, AM \perp d \\ B \in \beta, BM \perp d \end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{MA;MB})$.



Definiție: Cea mai mică măsură a unghiurilor diedre determinate de planele α și β se numește *măsura unghiului celor două plane* și se notează $m(\widehat{\alpha,\beta})$.

Consecință. Dacă $\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha,\ a \perp d \\ b \subset \beta,\ b \perp d \end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{a;b})$.

Teoremă. Fie α și β două plane secante și $d = \alpha \cap \beta$. Dacă planul γ este perpendicular pe dreapta d, iar $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{a;b})$.

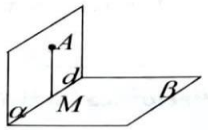
Observație: Dacă planele α și β coincid sau sunt paralele, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = 0°$.

Plane perpendiculare. Dacă măsura unghiul planelor α și β este de $90°$, atunci planele α și β se numesc ***plane perpendiculare***. Notăm $\alpha \perp \beta$ sau $\beta \perp \alpha$.

Criteriu de perpendicularitate a două plane

Teoremă: Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

Dacă $d \perp \beta$ și $d \subset \alpha$, atunci $\alpha \perp \beta$.



Consecință: Dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = d$, $M \in d$ și $A \in \alpha \setminus d$, atunci $AM \perp d$ dacă și numai dacă $AM \perp \alpha$.

Observație: Dacă un poligon convex $\mathcal{P}$ de arie S se proiectează pe un plan după un alt poligon convex (sau un segment) a cărui arie S', atunci $S' = S\cos u$, unde u este măsura unghiului planelor.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Numărul maxim al dreptelor diferite determinate de câte două din 4 puncte distincte este egal cu ... .

2. Un cub vopsit în galben a fost tăiat în 27 cubulețe identice. Numărul cuburilor vopsite doar pe o față este egal cu ... .

3. Fie 5 puncte distincte astfel încât exact 4 dintre ele sunt coplanare.
a) Numărul minim de drepte distincte determinate de câte două din aceste puncte este egal cu ... .
b) Numărul maxim de drepte distincte determinate de câte două din aceste puncte este egal cu ... .

4. Fie 6 puncte distincte două câte două.
a) Numărul minim de plane care pot fi determinate de câte 3 din cele 6 puncte este egal cu ... .
b) Numărul maxim de plane care pot fi determinate de câte 3 din cele 6 puncte este egal cu ... .

5. Valoarea de adevăr a propoziției „există patru puncte coliniare necoplanare" este ... .

6. Fie tetraedrul $ABCD$. Precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a) $A \in (BCD)$; ***b)*** $BD \subset (ABD)$;
c) $AB \subset (ABC)$; ***d)*** A, B, C necoplanare.

7. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $A'D' \subset (BCD')$; ***b)*** $(ABC) \equiv (ACC')$; ***c)*** $C \in (A'B'C')$.

8. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, în care $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 2$ cm, $AC = 4$ cm. Notăm cu P mijlocul segmentului $[AC]$. Dacă $MP \perp (ABC)$ și $MP = 2$ cm, determinați:
a) $d(M;AB)$; ***b)*** $d(M;BC)$; ***c)*** $d(C;(MBP))$; ***d)*** $d(A;(MBP))$.

9. Se dă triunghiul echilateral ABC, de latură $AB = 6$ cm și punctul Q mijlocul segmentului $[AC]$. Dacă $RQ \perp (ABC)$ și $RQ = 3$ cm, calculați:
a) $d(R;BC)$; ***b)*** $d(R;AB)$; ***c)*** $d(Q;(RBC))$; ***d)*** $d(A;(RQB))$.

10. Fie $ABCD$ un pătrat cu $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $MA \perp (ABC)$ și $MA = AB = 4$ cm, determinați:
a) $d(M,BC)$; ***b)*** $d(M,BD)$; ***c)*** $d(C,MD)$; ***d)*** $d(D,BM)$; ***e)*** $d(A,(MBD))$.

11. Fie triunghiul echilateral ABC și $PA \perp (ABC)$, $AP = AB = 6$ cm.
a) Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu ... cm.
b) Distanța de la punctul C la planul (PAB) este egală cu ... cm.

12. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC se construiește perpendiculara SA. Se știe că $SA = AB = AC = 2$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.
a) Distanța de la punctul S la dreapta BC este egală cu ... cm.
b) Distanța de la punctul B la planul (SAC) este egală cu ... cm.

13. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă $MA \perp (ABC)$ și $MA = 1$ cm, atunci:
a) distanța de la punctul M la dreapta BD este egală cu ... cm.
b) distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu ... cm.
c) distanța de la punctul C la planul (MAB) este egală cu ... cm.
d) distanța de la punctul A la planul (MDC) este egală cu ... cm.

14. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm.
a) Distanța de la punctul A' la dreapta BD este egală cu ... cm.
b) Distanța dintre planele (BCC') și (ADD') este egală cu ... cm.
c) Distanța de la punctul A' la dreapta CC' este egală cu ... cm.
d) Distanța dintre planele $(A'BC')$ și $(D'AC)$ este egală cu ... cm.

15. Pe planul unui pătrat $ABCD$ cu $AB = 2$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$ se ridică perpendiculara $PO = \sqrt{2}$ cm. Atunci:
a) distanța de la punctul P la dreapta AB este egală cu ... cm.
b) distanța de la punctul B la dreapta PA este egală cu ... cm.
c) distanța de la punctul C la planul (PAD) este egală cu ... cm.
d) distanța de la punctul B la dreapta PD este egală cu ... cm.

16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 4$ cm. Punctele M, P, Q sunt mijloacele muchiilor BC, CC', și $B'C'$.
a) Valoarea de adevăr a propoziției „$PQ \parallel (ADD')$" este ... .
b) Valoarea de adevăr a propoziției „$d(P,(MA'B')) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm" este ... .
c) Aria triunghiului APQ este egală cu ... cm^2.
d) Valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele MA' și PQ este egal cu ... .
e) Valoarea de adevăr a propoziției „$MA' \cap (APQ) \neq \varnothing$" este ... .

17. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a) $(ABB') \parallel (CDD')$; *b)* $(ACA') \subset (BCC') = CD$; *c)* $(AD'C) \parallel (BA'C')$;
d) $(ABC) \cap (CC'D') = CD$; *e)* $(ABC) \cap (A'B'C') = \varnothing$.

18. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinați:
a) Proiecția punctului A pe planul (BCC') este ... .
b) proiecția punctului D pe planul (ABB') este ... .
c) Proiecția segmentului $[DD']$ pe planul (BCC') este ... .
d) Proiecția dreptei AB pe planul (CDD') este ... .
e) Proiecția segmentului $[AC']$ pe planul (ABC) este ... .
f) Proiecția segmentului $[AC']$ pe planul (BCC') este ... .

19. Valoarea de adevăr a propoziției „Două plane pot avea în comun 7 puncte distincte" este ... .

20. Fie triunghiul echilateral ABC și $MA \perp (ABC)$, $MA = BC = 6$ cm. Dacă P este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci:
a) Unghiul format de dreapta BP cu planul (MAP) are măsura de ... °.
b) Aria triunghiului MPC este egală cu ... cm^2.
c) Distanța de la punctul C la planul (MAB) este egală cu ... cm.
d) Distanța de la punctul A la planul (MBC) este egală cu ... cm.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Într-un tetraedru $VABC$ avem $VA = VB = VC = 9$ cm și $AB = BC = CA = 6\sqrt{6}$ cm. Punctele M, S, P sunt mijloacele segmentelor VB, BC și respectiv VC.
a) Calculați lungimea segmentului $[VS]$. *b)* Demonstrați că $MS \parallel (VAC)$
c) Determinați $m(\sphericalangle AB; MP)$. *d)* Determinați $m(\sphericalangle VS; AC)$

22. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, $M \in (BB')$ și $AB' \cap A'B = \{O\}$.
a) Aflați distanța BM, astfel încât $OM + MC'$ să fie minimă.
b) Știind că $BM = 2,(6)$ cm, determinați valoarea cosinusului unghiului BOM.

23. Fie tetraedrul $ABCD$ cu toate muchiile congruente.
a) Știind că $AB = 6$ cm, determinați poziția punctului $P \in (AC)$ astfel încât suma $BP + PD$ să fie minimă.
b) Dacă M este mijlocul muchiei $[AB]$ și N este mijlocul muchiei $[CD]$, arătați că $2MN < AD + BC$.

24. Prin vârfurile paralelogramului $ABCD$ construim dreptele $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Fie punctele $A' \in a$, $B' \in b$, $C' \in c$, $D' \in d$, de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât $AA' = 4$ cm, $CC' = 3$ cm și $DD' = 2$ cm. Determinați lungimea segmentului $[BB']$, astfel încât $A'B'C'D'$ să fie paralelogram.

25. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu O, P și Q centrele pătratelor $ABCD$, $ADD'A'$ și respectiv $CDD'C'$.
a) Arătați că dreptele OD', CP și AQ sunt concurente într-un punct notat S.
b) Dacă $PS = \sqrt{5}$ cm, calculați lungimea laturii $[AB]$.

26. Triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, are latura $[BC]$ inclusă în planul α, iar $A \notin \alpha$. Se știe că $BC = 10$ cm și $AC = 8$ cm. Fie punctele $T \in (AB)$ și $Q \in (AC)$ astfel încât $AT = 2$ cm și $CQ = 2AQ$.
a) Determinați măsura unghiului format de dreptele TQ și BC.
b) Calculați perimetrul și aria trapezului $TQCB$.

27. Fie tetraedrul $VABC$ cu toate muchiile congruente. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ determinați valoarea cosinusului unghiului format de dreptele VM și AC.

28. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și $\{O\} = BC' \cap CB'$.
a) Aflați valoarea cosinusului unghiului determinat de dreptele AO și CD'.
b) Arătați că dreptele AC' și OD' sunt perpendiculare.

29. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $m(\widehat{BC', CD'}) = m(\widehat{A'B, AC}) = 60°$. Demonstrați că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

30. Fie $ABCD$ un pătrat și $MA \perp (ABC)$. Demonstrați că:
a) $BC \parallel (MAD)$; *b)* $BD \perp (MAC)$; *c)* $d(C,(MAB)) = CB$.

31. Dacă punctele G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale fețelor ABD și BCD ale tetraedrului $ABCD$, demonstrați că $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

32. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ fie O și O' centrele fețelor $ABCD$ și $BCC'B'$. Demonstrați că:
a) $OO' \parallel (AA'B')$; *b)* $OD' \parallel (A'BC')$; *c)* $OO' \perp (CA'D')$.

33. În tetraedrul $ABCD$ toate cele șase muchii sunt congruente. Înălțimea tetraedrului este DO, punctul M este proiecția punctului O pe muchia DB și $MC = 2\sqrt{7}$ cm.
a) Arătați că $AB = 6$ cm.
b) Calculați valoarea cosinusului unghiului determinat de dreptele MC și AD.

34. În tetraedrul $ABCD$, fie M și N picioarele perpendicularelor duse din A pe bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACD. Demonstrați că $MN \parallel (BCD)$.

35. Paralelogramele $ABCD$ și $ABFE$ sunt în plane diferite. Dacă M este mijlocul segmentului AE, arătați că $EC \parallel (MBD)$

36. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm și M, N, P mijloacele muchiilor BC, AA' respectiv $C'D'$.
a) Determinați aria triunghiului MNP.
b) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătați că patrulaterul $OMD'P$ este paralelogram.
c) Fie $\{S\} = MN \cap (A'B'C')$. Determinați lungimea segmentului $[C'S]$.

37. De aceeași parte a planului paralelogramului $ABCD$ construim perpendicularele EA, FB, GC și HD pe planul (ABC), astfel încât $AE = 5$ cm, $BF = 6$ cm, $CG = 7$ cm și $DH = 8$ cm. Fie M și N sunt mijloacele segmentelor $[EG]$ și $[FH]$.
a) Arătați că $M \neq N$; *b)* Demonstrați că $MN \perp (ABC)$.

38. În tetraedrul $ABCD$, fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC respectiv DAB.
a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.
b) Aflați raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și ABC.

39. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D, cu $AB = AC$, și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $AE = CF$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD).

40. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ Un plan α paralel cu planul (BCC') intersectează muchiile $[AB]$, $[CD]$, $[C'D']$ și $[A'B']$ în punctele E, F, G și H. Determinați valoarea raportului $\frac{AE}{AB}$, știind că $\frac{DH}{CH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

41. Fie punctele necoplanare A, B, C și D și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se consideră punctul $M \in (AG)$ și se notează $\{P\} = AG \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ și $\{R\} = AD \cap (BCM)$.
a) Arătați că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$.
b) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$.

42. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm, fie M, P, Q mijloacele muchiilor $[BC]$, $[D'C']$, $[AD]$ și $\{O\} = A'C' \cap B'D'$.
a) Arătați că planele (DPM) și (OBQ) sunt paralele.
b) Determinați valoarea sinusului unghiului dintre dreptele BQ și $D'C'$.
c) Determinați distanța dintre planele (DPM) și (OBQ).

43. Într-un tetraedru $ABCD$ cu toate muchiile egale cu 6 cm, fie $DO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Se notează cu M mijlocul segmentului $[AD]$. Determinați valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele OM și CD.

44. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$, lungimea înălțimii AA' de 4 cm, punctul G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $AG = 2\sqrt{7}$ cm.
a) Arătați că $AB = 6$ cm.
b) Fie punctul P mijlocul segmentului $[B'C']$. Demonstrați că dreapta AC' este paralelă cu planul $(A'BP)$.

45. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$, iar $AB = BB'$. Fie G centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $\{O\} = BC' \cap CB'$. Aflați valoarea tangentei unghiului dintre dreptele BB' și OG.

46. Proiecția triunghiului ABC pe planul α este triunghiul $A'BC$ cu $m(\sphericalangle BA'C) = 90°$. Dacă $AB = 15$ cm, $A'B = 9\sqrt{2}$ cm și $BC = 41$ cm, calculați:
a) perimetrul și aria triunghiului $BA'C$;
b) perimetrul și aria triunghiului ABC.

47. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, fie $\{O\} = BC' \cap CB'$ și $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.
a) Determinați lungimea proiecției segmentului $[OO']$ pe planul (ABC).
b) Determinați măsura unghiului format de dreapta OO' cu planul (ABC).
c) Determinați lungimea proiecției segmentului $[OO']$ pe planul (BCD').

48. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm, și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm. Determinați:
a) $d(D', B'C)$; *b)* $d(D', AB)$;
c) $d(D', AB')$; *d)* $d\big(D', (AB'C)\big)$.

49. Fie rombul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și $AB = 4$ cm. Dacă $SA \perp (ABC)$, $SA = 4$ cm, atunci:
a) determinați distanța de la punctul S la dreapta BD;
b) determinați distanța de la punctul S la dreapta CD;
c) determinați măsura unghiului format de dreapta SC cu planul (ABC);
d) determinați distanța de la punctul A la planul (SDC).

50. De aceeași parte a planului rombului $ABCD$ se ridică perpendicularele MA și TC. Dacă $AB = 6$ cm, $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și $MA = TC = 3\sqrt{3}$ cm, determinați:
a) măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC).
b) măsura unghiului dintre planele (MBD) și (TBD).
c) valoarea tangentei unghiului dintre planele (MBC) și (ABC).

Tema 2.7

Corpuri geometrice. Arii şi volume

Prisma dreaptă este prisma cu muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor.

Înălţimea h a unei prisme drepte este egală cu lungimea muchiei laterale.

Aria laterală A_l a unei prisme este egală cu suma ariilor feţelor laterale.

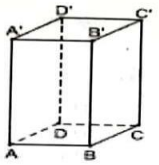
Aria totală A_t a unei prisme este egală cu suma dintre aria laterală şi ariile celor două baze.

Volumul unei prisme este egal cu produsul dintre aria bazei şi înălţime.

Notând cu P_b perimetrul bazei prismei şi cu A_b aria bazei prismei, avem:

$A_l = P_b \cdot h$	$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$	$V = A_b \cdot h$

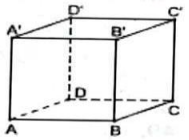
Paralelipipedul dreptunghic (cuboidul) este o prismă dreaptă cu baza dreptunghi. Fiind dat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, *lungimea diagonalei* paralelipipedului dreptunghic (d) este egală cu:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

În plus, $A_t = 2 \cdot (ab + bc + ca)$, iar $V = a \cdot b \cdot c$.

Cubul este un paralelipipedul dreptunghic cu toate dimensiunile egale ($a = b = c = l$). În cazul unui cub, avem:



$d = l\sqrt{3}$, $A_l = 4l^2$, $A_t = 6l^2$ şi $V = l^3$.

Prisma regulată este prisma dreaptă cu baza un poligon regulat.

Prisma triunghiulară regulată este prisma dreaptă cu baza un triunghi echilateral (**Figura 1**).

Prisma patrulateră regulată este prisma dreaptă cu baza un pătrat (**Figura 2**).

Prisma hexagonală regulată este prisma dreaptă cu baza un hexagon regulat (**Figura 3**).

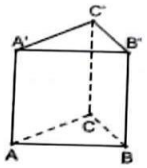


Figura 1

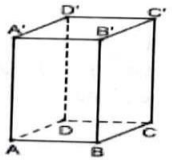


Figura 2

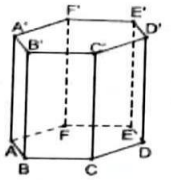


Figura 3

În cele ce urmează, notăm cu l, h, P_b, A_b, A_l, A_t şi V respectiv, lungimea laturii poligonului regulat de bază, înălţimea prismei, perimetrul bazei, aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul prismei regulate.

Prisma regulată	Perimetrul bazei	Aria bazei	Aria laterală	Volumul
triunghiulară	$P_b = 3l$	$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$A_l = P_b \cdot h = 3lh$	$V = A_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3} \cdot h}{4}$
patrulateră	$P_b = 4l$	$A_b = l^2$	$A_l = P_b \cdot h = 4lh$	$V = A_b \cdot h = l^2 \cdot h$
hexagonală	$P_b = 6l$	$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$	$A_l = P_b \cdot h = 6lh$	$V = A_b \cdot h = \frac{3l^2\sqrt{3} \cdot h}{2}$

Piramida regulată are baza poligon regulat, iar proiecţia ortogonală a vârfului V pe planul bazei este centrul O al poligonului de bază.

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Segmentul determinat de vârful piramidei şi mijlocul M al unei muchii a bazei se numeşte *apotema piramidei*. Orice apotemă a piramidei este perpendiculară pe muchia respectivă a bazei.

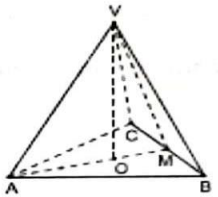


Figura 1. Piramida triunghiulară regulată

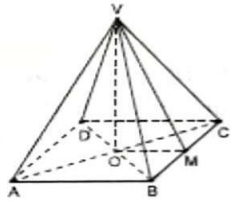


Figura 2. Piramida patrulateră regulată

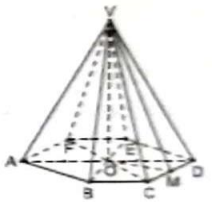


Figura 3. Piramida hexagonală regulată

Notaţii:

$AB = l$ – lungimea muchiei bazei piramidei; $OM = a_b$ – apotema bazei piramidei;

$VO = h$ – lungimea înălţimii piramidei; $VM = a_p$ – apotema piramidei.

P_b – perimetrul bazei; A_b – aria bazei;

A_l = aria laterală; A_t = aria totală; V = volumul piramidei.

	$a_p^2 = a_b^2 + h^2$ sau $a_p = \sqrt{a_b^2 + h^2}$	
$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$	$A_t = A_b + A_l = \frac{P_b(a_b + a_p)}{2}$	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Tetraedrul regulat este piramida care are toate feţele triunghiuri echilaterale.

Toate muchiile tetraedrului regulat sunt egale.

Dacă l este lungimea muchiei unui tetraedru regulat, atunci:

Apotema	Înălţimea	Aria laterală	Aria totală	Volumul
$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$	$h = \frac{l\sqrt{3}}{6}$	$A_l = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$	$A_t = l^2\sqrt{3}$	$V = \frac{l^2\sqrt{2}}{12}$

Trunchiul de piramidă regulată. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară. Prin secționarea piramidei cu un plan $(A'B'C')$ paralel cu planul bazei (ABC) se obține o piramidă $VA'B'C'$ asemenea cu piramida $VABC$. Poliedrul $ABCA'B'C'$, obținut prin detașarea piramidei $VA'B'C'$, se numește *trunchi de piramidă*. Când piramida inițială este regulată trunchiul obținut se numește *trunchi de piramidă regulată*.

Au loc relațiile:

1. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{VA}{VA'} = k$;
2. $\frac{A_{l_{VABC}}}{A_{l_{VA'B'C'}}} = \frac{A_{l_{VABC}}}{A_{l_{VA'B'C}}} = k^2$;
3. $\frac{V_{VABC}}{V_{VA'B'C'}} = k^3$.

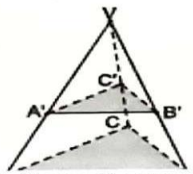


Figura 1. Piramidă și trunchi de piramidă triunghiulară regulată

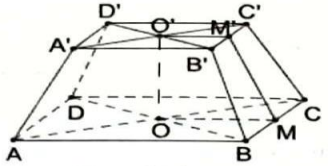


Figura 2. Trunchi de piramidă patrulateră regulată

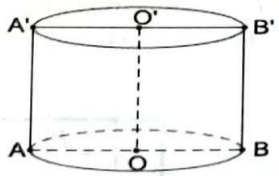
Pentru trunchiul de piramidă regulată se utilizează, de regulă, notațiile:

L = lungimea muchiei bazei mari; l = lungimea muchiei bazei mici;
h = înălțimea trunchiului de piramidă;
a_B = lungimea apotemei bazei mari; a_b = lungimea apotemei bazei mici;
a_t = lungimea apotemei trunchiului; V = volumul.
P_B = perimetrul bazei mari; P_b = perimetrul bazei mici;
A_B = aria bazei mari; A_b = aria bazei mici;
A_l = aria laterală; A_t = aria totală.

$A_B = \frac{P_B \cdot a_B}{2}$	$A_l = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_t}{2}$	$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$
$A_b = \frac{P_b \cdot a_b}{2}$	$A_t = A_l + A_B + A_b$	$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$

Cilindrul. Elementele cilindrului circular drept sunt:

- *bazele*, două discuri congruente aflate în plane paralele, $D(O;R)$ și $D'(O;R)$.
- *înălțimea* cilindrului $h = OO'$, egală cu distanța dintre cele două baze;
- *generatoarea* G a cilindrului, $G = AA'$, care, în cazul cilindrului circular drept, este egală cu înălțimea cilindrului.



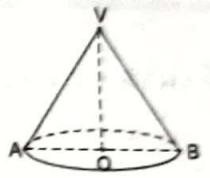
Suprafața laterală a cilindrului circular drept se desfășoară într-un plan după un dreptunghi cu dimensiunile $L = AA_1 = 2\pi R$ și $l = AA' = G$.

Aria laterală. Aria totală. Volumul cilindrului

Aria bazei	Aria laterală	Aria totală	Volumul
$A_B = \pi R^2$	$A_l = 2\pi RG$	$A_t = A_l + 2A_B = 2\pi R(G+R)$	$V = A_B \cdot h = \pi R^2 G$

Conul circular drept. Elementele conului circular drept sunt:

- *baza* conului este discul $D(O;R)$.
- *înălțimea* conului $VO = h$, egală cu distanța de la vârful V la planul bazei.
- *generatoarea* conului $G = VA$; are loc relația $G^2 = R^2 + h^2$.



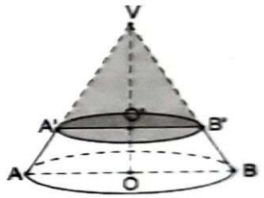
Suprafața laterală a conului circular drept se desfășoară în plan după un sector circular cu centrul V și rază VA. Notând cu $u°$ măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc din desfășurarea conului avem $u° = 360° \cdot \frac{R}{G} = 360° \cdot \sin \widehat{BVO}$.

Aria laterală. Aria totală. Volumul conului

Aria bazei	Aria laterală	Aria totală	Volumul
$A_B = \pi R^2$	$A_l = \pi RG$	$A_t = A_l + A_B = \pi R(R+G)$	$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Trunchiul de con circular drept. Elementele trunchiului de con circular drept sunt:

- *baza mare*, $D(O;R)$, $R = AO$, $A_B = \pi R^2$.
- *baza mică*, $D(O;r)$, $r = A'O'$; $A_b = \pi r^2$.
- *generatoarea*, $g = AA' = BB'$.
- *înălțimea*, $h = OO'$, distanța dintre cele două baze.



Are loc relația: $g^2 = h^2 + (R-r)^2$.

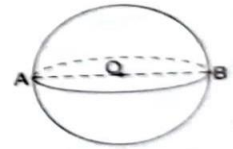
Observație. Conul mic îndepărtat $(VA'B')$ este asemenea cu conul inițial (VAB) și au loc relațiile:

$$\frac{A_{l_{(VA'B')}}}{A_{l_{(VAB)}}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 ; \qquad \frac{V_{(VAB)}}{V_{(VA'B')}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 .$$

Aria laterală. Aria totală. Volumul trunchiului de con circular drept

- **Aria laterală**: $A_l = \pi g(R+r)$.
- **Aria totală**: $A_t = A_l + A_B + A_b = \pi g(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$.
- **Volumul**: $V = \frac{h}{3}\cdot\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) = \frac{\pi h}{3}\cdot\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$.

Sfera. Sfera de ***centru*** O și ***rază*** R este mulțimea tuturor punctelor din spațiu situate la distanța R de un punct fix O dat. Notăm: $S(O;R) = \{P \mid OP = R\}$.



- ***Aria sferei***: $A = 4\pi R^2$.
- ***Volumul sferei***: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.
- ***Aria calotei / zonei sferice*** cu raza R și înălțimea h este $A_{zona} = 2\pi Rh$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 cm, 3 cm și 6 cm este egală cu ... cm^2.

2. Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de $3\sqrt{3}$ cm, înălțimea de 8 cm și diagonala de 10 cm este egal cu ... cm^3.

3. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de $4\sqrt{3}$ cm, diagonala bazei de 8 cm și $V = 32\sqrt{3}$ cm^3 este egală cu ... cm^2.

4. Volumul unui cub cu muchia de 6 cm este egal cu ... cm^3.

5. Aria totală a unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.

6. Aria laterală a unui cub cu suma muchiilor de 36 cm este egală cu ... cm^2.

7. Aria laterală a unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu muchia bazei de 4 cm și înălțimea de 10 cm este egală cu ... cm^2.

8. Volumul unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu diagonala unei fețe laterale de 13 cm și înălțimea de 12 cm este egal cu ... cm^3.

9. Aria totală a unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu înălțimea de 9 cm și înălțimea bazei de $4\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.

10. Aria laterală a unui con circular drept cu raza de 3 cm și înălțimea de 4 cm este egală cu ... cm^2.

11. Aria totală a unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 7 cm este egal cu ... cm^2.

12. Volumul unui con circular drept cu raza de 6 cm și generatoarea de 10 cm este egal cu ... cm^3.

13. Aria totală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei mari de 12 cm, latura bazei mici de 6 cm și apotema de 3 cm este egală cu ... cm^2.

14. Aria laterală a unui cilindru circular drept cu raza de 4 cm și înălțimea de 6 cm este egală cu ... cm^2.

15. Aria laterală a unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu diagonala unei fețe laterale de $5\sqrt{5}$ cm și diagonala prismei de 15 cm este egală cu ... cm^2.

16. Volumul unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu muchia bazei de 10 cm și măsura unghiului dintre diagonala prismei și planul bazei de 60° este egal cu ... cm^3.

17. Aria laterală a unei prisme drepte cu bazele hexagoane regulate, cu latura bazei de 8 cm și înălțimea de 2 cm este egală cu ... cm^2.

18. Volumul unui cilindru circular drept cu raza de 5 cm și înălțimea de 7 cm este egal cu ... cm^3.

19. Aria laterală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 6 cm, latura bazei mici de 4 cm și apotema de 5 cm este egală cu ... cm^2.

20. Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea de 6 cm și apotema bazei de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.

21. Volumul unei piramide hexagonale regulate cu înălțimea de 4 cm și latura bazei de 6 cm este egal cu ... cm^3.

22. Volumul unei piramide triunghiulare regulate cu aria bazei egală cu $12\sqrt{3}$ cm^2 și aria totală egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2 este egal cu ... cm^3.

23. Aria laterală a unei piramide hexagonale regulate cu înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm și latura bazei de 6 cm este egală cu ... cm^2.

24. Volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 6 cm, latura bazei mici de 4 cm și înălțimea de 3 cm este egal cu ... cm^3.

25. Aria totală a unei sfere cu raza de 2 cm este egală cu ... cm^2.

26. Volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei mari de 9 cm, latura bazei mici de 6 cm și înălțimea de 2 cm este egal cu ... cm^3.

27. Aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea de $3\sqrt{2}$ cm și volumul egal cu $54\sqrt{6}$ cm^3 este egală cu ... cm^2.

28. Aria totală a unui tetraedru regulat cu muchia bazei de 6 cm este egală cu ... cm^2.

29. Volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei mari de 8 cm, latura bazei mici de 6 cm și înălțimea de 1 cm este egal cu ... cm^3.

30. Volumul unui tetraedru regulat cu muchia bazei de 8 cm este egal cu ... cm^3.

31. Aria laterală a unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mari de 6 cm, raza bazei mici de 2 cm și generatoarea de 5 cm este egală cu ... cm^2.

32. Volumul unei prisme drepte cu bazele hexagoane regulate, cu înălțimea de 4 cm și latura bazei de 3 cm este egală cu ... cm^3.

33. Aria totală a unei piramide patrulatere regulate cu muchia bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm este egalăm cu ... cm^2.

34. Volumul unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mari de 11 cm, raza bazei mici de 3 cm și înăl□imea de 10 cm este egală cu ... cm^2.

35. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate cu fețele laterale triunghiuri echilaterale cu lungimea laturii de 6 cm este egală cu ... cm^2.

36. Volumul unei sfere cu raza de 2 cm este egal cu ... cm^3.

37. Volumul unei piramide patrulatere regulate cu aria totală egală cu 324 m^2 lungimea laturii bazei de $6\sqrt{3}$ m este egal cu ... cm^3.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

38. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu volumul 125 cm^3.
a) Calculați aria totală a cubului.
b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, determinați volumul piramidei $OA'B'C'D'$.

39. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are $AB = 2$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și $AE = 2$ cm.
a) Calculați aria totală a paralelipipedului.
b) Determinați volumul paralelipipedului.

40. În conul circular drept cu vârful V, generatoarea este de 10 cm, înălțimea de 8 cm, iar punctele A și B sunt două puncte diametral opuse situate pe cercul de la bază.

a) Calculați volumul conului circular drept.
b) Determinați valoarea sinusului unghiului AVB.

41. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC are $AB=VA=6$ cm.
a) Demonstrați că muchiile VA și BC sunt perpendiculare.
b) Calculați volumul piramidei $VABC$.

42. Fie trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele O și O' sunt centrele de greutate ale bazelor ABC și $A'B'C'$, $AB=8$ cm, $A'B'=6$ cm și $OO'=4$ cm.
a) Calculați aria totală a trunchiului.
b) Determinați volumul piramidei din care provine trunchiul.

43. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza ABC triunghi echilateral. Volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}$ cm^3. Muchiile AB și BB' sunt congruente, iar punctul M este mijlocul laturii $[AB]$.
a) Arătați că $AB=6$ cm.
b) Determinați aria totală a prismei.

44. $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată care are baza mare pătratul $ABCD$. Măsura unghiului dintre muchia AA' și planul (ABC) este de 45° și $AA'=A'B'=6$ cm.
a) Arătați că înălțimea trunchiului de piramidă este de $3\sqrt{2}$ cm.
b) Calculați volumul trunchiului de piramidă.

45. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, are $AB=6$ cm și $AA'=7$ cm.
a) Calculați volumul prismei.
b) Determinați aria totală a prismei.

46. Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari de 30 cm, raza bazei mici de 15 cm și generatoarea de 30 cm.
a) Determinați măsura unghiului determinat de generatoarea trunchiului de con și planul bazei mari.
b) Calculați volumul conului din care provine trunchiul de con.

47. Se consideră piramida triunghiulară regulată de vârf V și bază ABC, care are înălțimea de 12 cm și măsura unghiului format de planul bazei cu o față laterală de 60°.
a) Arătați că $AB=24$ cm.
b) Determinați volumul piramidei ABC.

48. O prismă dreaptă cu bazele hexagoane regulate $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ are măsura unghiului $A'CA$ de 45°, $AD\cap CF=\{O\}$ și $C'O=6\sqrt{3}$ cm.
a) Arătați că $AB=3\sqrt{3}$ cm.
b) Calculați aria totală a prismei.

49. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are ca baze pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ înălțimea $AA'=9$ cm și diagonala $DB'=3\sqrt{41}$ cm.
a) Determinați volumul prismei.
b) Calculați aria triunghiului ACD'.

50. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, de vârf V, are aria laterală egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2 și apotema piramidei de $4\sqrt{3}$ cm.
a) Arătați că $AB=4$ cm.
b) Calculați volumul piramidei.

51. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are $AB=6$ cm. Pe laturile pătratului $ABCD$ alegem punctele, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$ astfel ca $AM=BN=CP=DQ=2$ cm.
a) Demonstrați că $MNPQ$ este pătrat.
b) Calculați valoarea raportului dintre volumul cubului și volumul piramidei patrulatere regulate $O'MNPQ$, unde $\{O'\}=A'C'\cap B'D'$.

52. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, punctul N este mijlocul laturii $[BC]$ și $DM=2\sqrt{5}$ cm.
a) Calculați aria totală a cubului.
b) Dacă aria triunghiului $A'MD$ este egală cu a cm^2, arătați că $9<a<10$.

53. Dreptunghiul $ABCD$ este o secțiune axială a unui cilindru circular drept. Înălțimea cilindrului este $OO'=12$ cm, unde punctul O este centrul bazei de diametru $AB=10$ cm.
a) Calculați aria laterală a cilindrului.
b) Arătați că cel mai scurt drum dintre punctele A și C, parcurs pe suprafața laterală a cilindrului, are lungimea mai mică decât 20 cm.

54. Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ de vârf D și bază ABC are $BC=AD=6$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.
a) Calculați volumul piramidei $ABCD$.
b) Determinați aria triunghiului AMN.

55. Lungimile razelor unui trunchi de con circular drept sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3. Generatoarea trunchiului de con are lungimea de $10\sqrt{2}$ cm și face cu planul bazei mari un unghi de 45°.
a) Arătați că raza bazei mari este egală cu 30 cm.
b) Calculați aria totală a trunchiului de con.

56. $SABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, măsura unghiului determinat de dreptele SM și SA este egală cu 90° și $SA=6\sqrt{2}$ cm.
a) Calculați volumul piramidei $SABC$.
b) Fie punctele A' și B' mijloacele muchiilor SA și respectiv SB, iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC). Calculați aria triunghiului CPQ.

57. Un con circular drept are aria laterală egală cu 15π cm^2 și aria totală egală cu 24π cm^2.
a) Arătați că raza bazei conului este egală cu 3 cm.
b) Calculați volumul conului.

58. Piramida triunghiulară $ABCD$ are toate muchiile congruente de lungime 4 cm. Punctul M este mijlocul laturii AC.
a) Calculați aria triunghiului MBD.
b) Determinați volumul tetraedrului $ABCD$.

59. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ are $AB=18$ cm, $A'B'=6$ cm și apotema trunchiului de 12 cm.
a) În trapezul $ABB'A'$ fie $AB'\cap A'B=\{P\}$. Calculați perimetrul triunghiului PAB.
b) Calculați volumul trunchiului de piramidă.

60. Piramida patrulateră regulată $SPACE$, de bază $PACE$, are muchia bazei $PA=12$ cm și înălțimea $SO=6$ cm. Se notează cu M mijlocul muchiei SP.
a) Calculați volumul piramidei $SPACE$.
b) Arătați că dreapta MO este paralelă cu planul (SEC).

61. Aria unei sfere este egală cu 36π cm^2.
a) Determinați lungimea razei sferei.
b) Calculați volumul sferei.

62. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, are muchia bazei $AB = 4$ cm și aria laterală egală cu 72 cm^2.
a) Arătați că muchia laterală a prismei este de 6 cm.
b) Calculați volumul piramidei a cărei bază coincide cu una din bazele prismei, iar vârful se găsește în centrul de greutate al celeilalte baze a prismei.

63. În prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat, măsura unghiului dintre diagonala BD' și planul (ABC) este de $60°$, iar latura bazei $ABCD$ este $AB = 5$ cm.
a) Demonstrați că dreptele $D'C$ și AD sunt perpendiculare.
b) Calculați aria laterală a prismei.

64. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, muchia bazei este de $6\sqrt{2}$ cm și volumul piramidei este egal cu $144\sqrt{3}$ cm^3. Punctul E este situat pe muchia AV astfel încât $AE = 2 \cdot VE$.
a) Arătați că triunghiul VAC este echilateral.
b) Calculați aria laterală a piramidei.

65. Piramida patrulateră regulată $VABCD$, de vârf V și bază $ABCD$, are muchia bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm. Punctul M este mijlocul laturii BC.
a) Calculați aria laterală a piramidei.
b) Fie punctul N situat pe latura $[AB]$ astfel încât $NB = 3 \cdot AN$. Calculați aria triunghiului MND.

66. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu 60 cm, iar lungimea diagonalei $AC' = 9$ cm.
a) Calculați aria totală a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.
b) Știind că $AB = BC = 4$ cm, calculați perimetrul dreptunghiului $ACC'A'$.

67. Muchia cubului $ABCDA'B'C'D'$ este $AB = 4$ cm. Punctele M și N se află pe muchiile DD', respectiv BB', astfel încât $MD' = BN = 1$ cm.
a) Calculați aria totală a piramidei triunghiulare regulate $ACD'B'$.
b) Calculați aria triunghiului AMN.

68. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic care are $AB = 6\sqrt{2}$ cm, BC=6 cm și măsura unghiului $BA'C$ este egală cu $30°$.
a) Arătați că $AA' = 6$ cm.
b) Calculați aria totală a paralelipipedului.

69. Înălțimea, raza mică și raza mare a unui trunchi de con circular drept au lungimile direct proporționale cu numerele 3, 2 și 5. Știind că aria laterală a trunchiului este egală cu $84\sqrt{2}\pi$ cm^2, determinați:
a) lungimea generatoarei trunchiului;
b) volumul trunchiului de con.

70. Se consideră un trunchi de con circular drept cu baza mică de arie 36π. Raza și generatoarea conului din care provine trunchiul sunt invers proporționale cu numerele 0,(3) și 0,2, iar înălțimea conului are 12 cm.
a) Determinați la ce distanță de vârful conului se află centrul bazei mici.
b) Calculați aria totală și volumul trunchiului și a conului din care provine trunchiul.

Variante de subiecte 3

3.1. Subiecte date la Evaluarea Națională în anii 2010 – 2015

3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

3.1. Subiecte date la Evaluarea Națională în anii 2010-2015

Testul 1 Evaluarea Națională 2015 (25 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10 \cdot 2 - 20$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{4} = \frac{3}{2}$, atunci a este egal cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $[1,5]$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Pătratul $ABCD$ are latura de 6 cm. Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu cm....

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Măsura unghiului determinat de dreptele AB și BF este egală cu ...°.

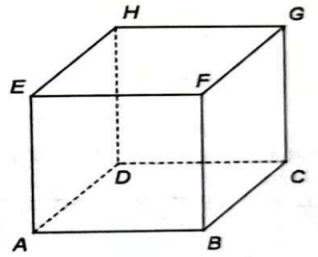
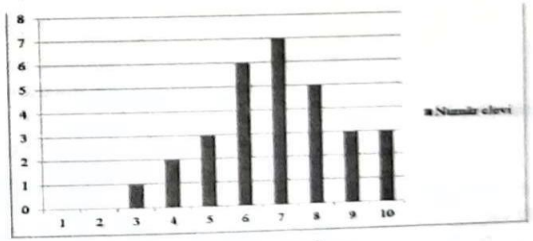


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de notele obținute la teza de matematică pe semestrul al II-lea.



Numărul elevilor care au obținut nota 10 este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Calculați media aritmetică a numerelor de două cifre, multipli ai lui 40.

(5p) **3.** Mihai a cheltuit o sumă de bani în două zile. În prima zi Mihai a cheltuit 30% din sumă, iar în a doua zi restul de 35 de lei. Calculați suma de bani cheltuită de Mihai în prima zi.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

(5p) *a)* Calculați $f(-2)$.

(5p) *b)* Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^2-49}{x^2-7x}-\dfrac{2x+7}{x^2+x}:\dfrac{1}{x+1}$, unde x este număr real, $x\neq -1$, $x\neq 0$ și $x\neq 7$. Arătați că $E(x)=-1$, pentru orice x număr real, $x\neq -1$, $x\neq 0$ și $x\neq 7$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* este schița unui teren în formă de dreptunghi $ABCD$ cu AB=150m și AD=100m. Punctul M este mijlocul laturii AD, iar punctul N este situat pe latura DC astfel încât DN=2NC.

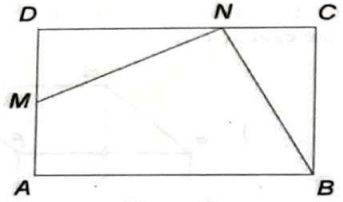


Figura 2

(5p) *a)* Arătați că aria terenului $ABCD$ este egală cu 1,5ha.

(5p) *b)* Demonstrați că triunghiul MNB este isoscel.

(5p) *c)* Calculați măsura unghiului format de dreptele MN și NB.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA=3\sqrt{5}$ dm și $AB=6$ dm. Punctul M este mijlocul laturii AD.

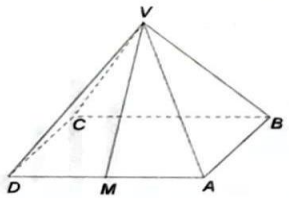


Figura 3

(5p) *a)* Arătați că $VM=6$ dm.

(5p) *b)* Calculați câte grame de vopsea sunt necesare pentru vopsirea suprafeței laterale a piramidei, știind că pentru vopsirea unei suprafețe de un decimetru pătrat se folosesc 30 grame de vopsea.

(5p) *c)* Demonstrați că sinusul unghiului dintre planele (VAD) și (VBC) este egal cu $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Testul 2 Evaluarea Națională 2015, subiect de rezervă (25 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului 10:52- este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\dfrac{x}{9}=\dfrac{5}{3}$, atunci x este egal cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural de două cifre este egal cu ... .

(5p) **4.** Trapezul $ABCD$ are bazele AB = 6 cm și CD = 4 cm. Linia mijlocie a trapezului $ABCD$ are lungimea de cm....

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un con circular drept cu raza bazei AO = 3cm și generatoarea VA = 5cm. Înălțimea VO a acestui con este egală cu cm... .

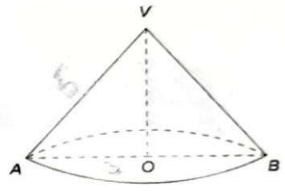


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile măsurate la o stație meteorologică, la aceeași oră, în fiecare zi a unei săptămâni din luna aprilie.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	11	18	15	15	13	19	17

Cea mai mare temperatură măsurată în acea săptămână a fost egală cu ... °C.

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor $x=8-2\cdot 3$ și $y=2^3$.

(5p) **3.** Într-o clasă cu 30 de elevi, numărul băieților reprezintă 40% din numărul elevilor clasei. Determinați numărul fetelor din această clasă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

(5p) *a)* Calculați $f(3)$.

(5p) *b)* Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră $E(n)=(3n+7)^2-2(3n+7)+1$, unde n este număr natural. Arătați că $E(n)$ este pătrat perfect divizibil cu 9, pentru orice număr natural n.

Subiectul III (30 de puncte)

(5p) **1.** *Figura 2* este schița unui aranjament floral dintr-un parc. Vârfurile dreptunghiului $ABCD$ sunt situate pe cercul de centru O și rază $OA = 5$m, iar $AB = 8$m. Pe suprafața haşurată sunt plantate flori, iar suprafața nehaşurată din interiorul cercului este acoperită cu gazon. este schița unui aranjament floral dintr-un parc. Vârfurile dreptunghiului $ABCD$ sunt situate pe cercul de centru O și rază $OA = 5$m, iar $AB = 8$m. Pe suprafața haşurată sunt plantate flori, iar suprafața nehaşurată din interiorul cercului este acoperită cu gazon.

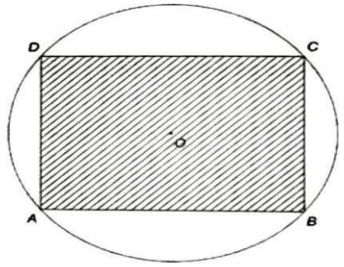


Figura 2

(5p) ***a)*** Arătați că lungimea cercului de centru O și rază OA este egală cu 10π m .

(5p) ***b)*** Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

(5p) ***c)*** Arătați că suprafața acoperită cu gazon are aria mai mică decât 30,75 m^2. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu înălțimea VO, $BC = 12$cm și $VM = 6$cm, unde punctul M este mijlocul segmentului BC.

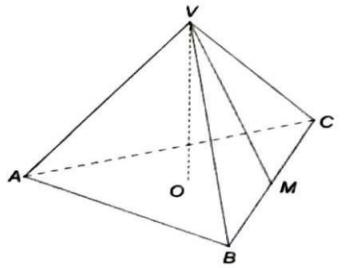


Figura 3

(5p) ***a)*** Arătați că aria triunghiului VBC este egală cu 36 cm^2 .

(5p) ***b)*** Calculați volumul piramidei $VABC$.

(5p) ***c)*** Demonstrați că dreptele VA și VM sunt perpendiculare.

Testul 3 Evaluarea Națională 2015, sesiunea specială (10 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $20 : 2 - 10$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{6} = \frac{25}{3}$, atunci a este egal cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural din intervalul $[2,6]$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 18cm. Lungimea unei laturi a acestui triunghi este egală cu cm....

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un con circular drept cu raza bazei $AO = 3$cm și înălțimea $VO = 4$cm. Generatoarea VA a acestui con este egală cu ... cm.

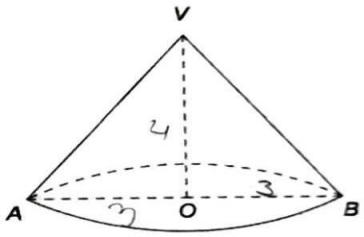


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile măsurate la o stație meteorologică, la aceeași oră, în fiecare zi a unei săptămâni din luna mai.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	13	15	14	13	12	19	16

Cea mai mică temperatură măsurată în acea săptămână a fost de ... °C.

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Calculați media aritmetică a numerelor naturale care sunt divizori ai lui 7.

(5p) **3.** Numerele x și y sunt direct proporționale cu numerele 3 și 4. Determinați cele două numere, știind că y este cu 14 mai mare decât x.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

(5p) ***a)*** Calculați $f(5)$.

(5p) ***b)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{(x+3)(x-1)}{x^2-2x+1}$, unde x este număr real, $x \neq -3$, $x \neq -1$ și $x \neq 1$. Arătați că $E(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru orice x număr real, $x \neq -3$, $x \neq -1$ și $x \neq 1$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. *Figura 2* este schița unui steag format din două trapeze dreptunghice $ABCD$ și $EFCD$, $AE \perp DC$, în care $AB = EF = 8$dm, $DC = 6$dm, $AD = 2\sqrt{3}$ dm și punctul D este mijlocul segmentului AE.

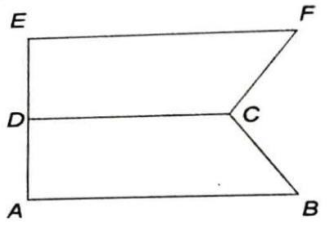


Figura 2

(5p) ***a)*** Arătați că aria trapezului $ABCD$ este egală cu $14\sqrt{3}$ dm^2.

(5p) ***b)*** Calculați lungimea segmentului BF.

(5p) ***c)*** Arătați că unghiul BCF are măsura de $120°$.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea de 4m și latura bazei de 8m.

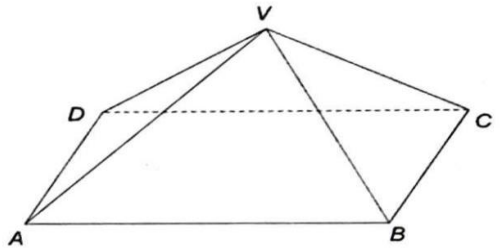


Figura 3

(5p) ***a)*** Arătați că perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 32m.

(5p) ***b)*** Arătați că aria laterală a piramidei $VABCD$ este egală cu $64\sqrt{2}$ m^2.

(5p) ***c)*** Determinați măsura unghiului dintre planul unei fețe laterale a piramidei și planul bazei.

Testul 4 Evaluarea Națională 2015, simulare oficială (24 februarie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{3}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Prețul unui stilou este 20 de lei. După o reducere cu 10%, prețul stiloului va fi ... lei.

(5p) **3.** Dacă n este singurul număr natural din intervalul $[n,8)$, atunci n este egal cu ... .

(5p) **4.** Punctul O este situat în interiorul triunghiului echilateral ABC astfel încât $AO = BO = CO$. Măsura unghiului AOB este egală cu ...°.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Suma lungimilor muchiilor care au în comun vârful A este egală cu 36 cm. Lungimea muchiei AB este egală cu ... cm.

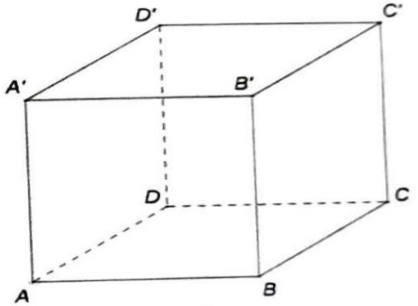
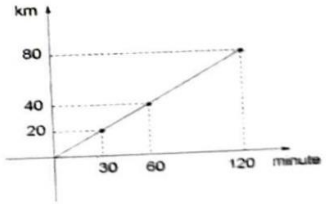


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos este reprezentată dependența dintre distanța parcursă de un autocar și timpul în care este parcursă această distanță. Distanța parcursă de autocar în 120 de minute este de ... km.



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Determinați numerele naturale de trei cifre, de forma $\overline{abc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și au suma cifrelor egală cu 22.

(5p) **3.** Un elev citește o carte în două zile. În prima zi el citește 47% din numărul de pagini ale cărții, iar a doua zi citește cele 53 de pagini care au mai rămas. Calculați numărul de pagini ale cărții.

4. Se consideră numerele reale $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ şi $y=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(5p) *a)* Arătaţi că $x\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{2})=4$.

(5p) *b)* Calculaţi x^2-y.

(5p) **5.** Se consideră $E(x)=(x^2+x+1)^2-(x^2+x)^2-x^2$, unde x este număr real. Arătaţi că $E(n)$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* este schiţa unui parc în formă de dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 5$hm şi $AD = 3$hm. Aleile principale din acest parc sunt reprezentate de segmentele EF, DP, DQ, BP şi BQ, unde $E\in(AB)$, $F\in(CD)$ astfel încât $AE = CF = 1$ hm, iar segmentele DP şi BQ reprezintă drumurile cele mai scurte de la punctele D, respectiv B la dreapta EF.

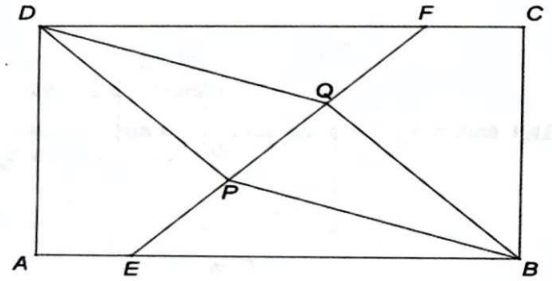


Figura 2

(5p) *a)* Calculaţi lungimea aleii EF.

(5p) *b)* Arătaţi că traseul $E\to P\to D$ şi aleea EF au aceeaşi lungime.

(5p) *c)* Demonstraţi că patrulaterul $DPBQ$ este paralelogram.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA = 8$cm şi $AB = 8$cm. Punctele E şi F sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BC. Punctul M este situat pe muchia VB astfel încât $EM\perp VB$

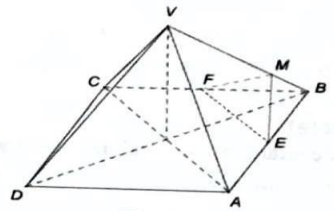


Figura 3

(5p) *a)* Calculaţi aria triunghiului BEF.

(5p) *b)* Determinaţi măsura unghiului format de dreapta VD cu planul (ABC).

(5p) *c)* Demonstraţi că muchia VB este perpendiculară pe planul (EMF).

Testul 5 Evaluarea Naţională 2015, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10 + 100 : 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Patru pixuri de acelaşi fel costă 20 de lei. Opt astfel de pixuri costă ... lei.

(5p) **3.** Dacă $A=\{2,3,4,5\}$ şi $B=\{0,1,2\}$, atunci mulţimea $A\cap B$ este egală cu $\{...\}$.

(5p) **4.** Pătratul $ABCD$ are latura de 5 cm. Aria pătratului $ABCD$ este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentată o sferă cu raza de 3cm. Volumul sferei este egal cu ... π cm^3.

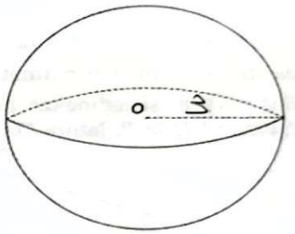
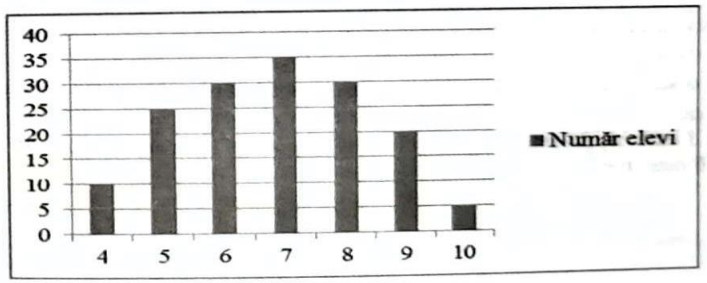


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos este prezentată repartiţia elevilor claselor a VIII-a dintr-o şcoală, în funcţie de notele obţinute la teza de matematică pe semestrul I.



Numărul elevilor care au obţinut nota 9 este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Calculaţi media aritmetică a numerelor reale $x=2(4-\sqrt{7})$ şi $y=2\sqrt{7}$.

(5p) **3.** Un autoturism a parcurs un traseu în două zile. În prima zi autoturismul a parcurs 30% din lungimea traseului, iar în a doua zi autoturismul a parcurs restul de 350 km. Calculaţi lungimea întregului traseu.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+3$, unde a este un număr real.

(5p) *a)* Determinați numărul real a, știind că $f(-3)=0$.

(5p) *b)* Pentru $a=1$, arătați ca triunghiul OAB este isoscel, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{(x+1)^2-4}{x}:\dfrac{x^2-x}{x^2}$, unde x este număr real, $x\neq 0$ și $x\neq 1$. Determinați numărul real m, $m\neq 0$ și $m\neq 1$, știind că $E(m)=5$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* este schița unui patinoar în formă de dreptunghi $ABCD$, cu lungimea $AD=30\sqrt{3}$ m și lățimea $AB=30$ m. Un patinator pornește din punctul M situat pe latura AB astfel încât $BM=10$ m și patinează paralel cu diagonalele dreptunghiului atingând latura BC în N, latura CD în P, latura DA în Q și se întoarce în punctul M.

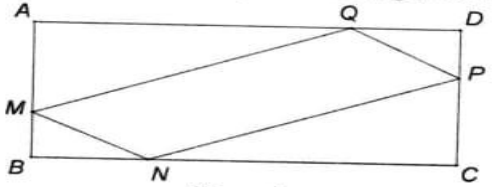


Figura 2

(5p) *a)* Calculați aria dreptunghiului $ABCD$.

(5p) *b)* Arătați că $m(\sphericalangle NMQ)=60^\circ$.

(5p) *c)* Arătați că distanța parcursă de patinator pe traseul $M\to N\to P\to Q\to M$ este egală cu 120 m.

2. În *Figura 3* este reprezentat un con circular drept cu înălțimea VO, $VO=12$ cm. Segmentul AB este diametru al bazei conului și $VA=15$ cm.

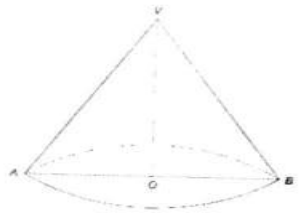


Figura 3

(5p) *a)* Arătați că volumul conului circular drept este egal cu 324π cm^3.

(5p) *b)* Calculați valoarea sinusului unghiului format de generatoarea conului cu planul bazei.

(5p) *c)* Conul se secționează cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât aria secțiunii formate este egală cu 9π cm^2. Determinați distanța de la punctul V la planul de secțiune.

Testul 6 Evaluarea Națională 2014 (25 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12-6\cdot 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă 10 reprezintă 50% dintr-un număr, atunci numărul este egal cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural n pentru care $n\leq 8$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Rombul $ABCD$ are diagonala de 6 cm și, respectiv, de 8 cm. Aria rombului $ABCD$ este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un tetraedru $ABCD$ în care $AB=8$ cm. Suma tuturor muchiilor tetraedrului $ABCD$ este egală cu ... cm.

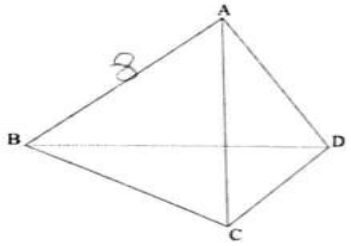
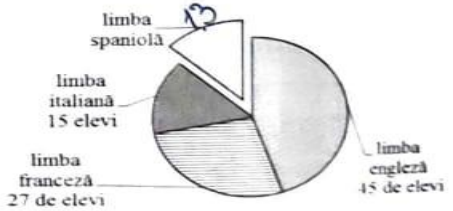


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate opțiunile celor 100 de elevi din clasele a V-a ale unei școli, opțiuni referitoare la studiul limbilor moderne.



Numărul elevilor din clasa a V-a care optează pentru studiul limbii spaniole este egal cu ...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral.

(5p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor $a=2^3+1$ și $b=3+3:3$.

(5p) **3.** Ion parcurge cu autocarul un drum în trei zile. În prima zi a parcurs 20% din drum, în a doua zi 30% din rest și în a treia zi ultimii 560 de kilometri din drum. Determinați lungimea drumului parcurs de Ion în cele 3 zile.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

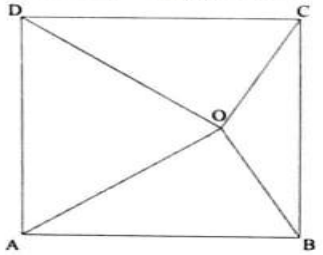
(5p) *a)* Calculați $f(2)$.

(5p) *b)* Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x(x+2)}:\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$, unde x este număr real, $x\neq -2$ și $x\neq 0$. Arătați că $E(x)=1$ pentru orice x număr real, $x\neq -2$ și $x\neq 0$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* reprezintă schița unui covor în formă de dreptunghi $ABCD$. Modelul covorului, prezentat în figură, este format de triunghiurile AOB, BOC, COD și DOA. Punctul O este situat în interiorul dreptunghiului $ABCD$ astfel încât triunghiul AOD este echilateral, $AD=2$ m și $m(\sphericalangle BOC)=2m(\sphericalangle AOD)$.

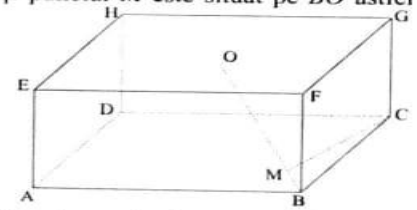


(5p) *a)* Calculați perimetrul triunghiului AOD.

(5p) *b)* Arătați că distanța de la punctul O la latura BC este egală cu $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m.

(5p) *c)* Arătați că lungimea conturului covorului este mai mică decât 9 m.

2. În *Figura 3* este reprezentată schematic o cutie de carton cu capac, în formă de prismă dreaptă $ABCDEFGH$ cu baza $ABCD$ pătrat, $AB=20$ cm, $AE=10$ cm. Punctul O este mijlocul segmentului EG și punctul M este situat pe BO astfel încât distanța CM să fie minimă.



(5p) *a)* Calculați volumul cutiei.

(5p) *b)* Aria suprafeței cartonului folosit pentru confecționarea cutiei reprezintă 110% din aria totală a cutiei. Determinați câți centimetri pătrați de carton au fost folosiți pentru confecționarea cutiei.

(5p) *c)* Arătați că $CM=\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$ cm.

Testul 7 Evaluarea Națională 2014, subiect de rezervă (25 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

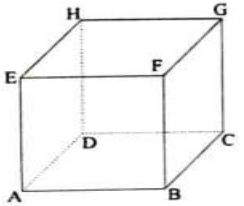
(5p) **1.** Rezultatul calculului $4-2\cdot 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\dfrac{a}{6}=\dfrac{2}{3}$, atunci numărul a este egal cu ... .

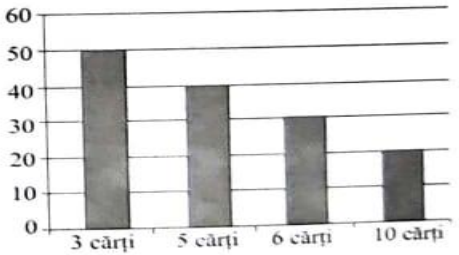
(5p) **3.** Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $[-3, 3)$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Pătratul $ABCD$ are perimetrul de 24 cm. Latura AB are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDEFGH$ care are latura de 5 cm. Volumul cubului $ABCDEFGH$ este egal cu ... cm^3.



(5p) **6.** Elevii claselor a VIII-a dintr-o școală au donat cărți pentru bibliotecă. În diagrama de mai jos este prezentată repartiția elevilor după numărul de cărți donate bibliotecii de către fiecare elev.



Numărul elevilor care au donat câte 5 cărți este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată cu vârful S și baza $ABCD$.

(5p) **2.** Determinați numărul real a știind că $a\sqrt{3}=\sqrt{27}$.

(5p) **3.** Cele 428 de scaune dintr-o sală de spectacole sunt așezate în 20 de rânduri, fiecare rând având 21 sau 22 de scaune. Determinați numărul de rânduri din sală care au câte 22 de scaune.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

(5p) *a)* Calculați $f(1)$.

(5p) *b)* Determinați măsura unghiului OMN, unde M și N sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x-2}{x^2-4}\cdot\frac{5x+10}{x-3}+1\right)\cdot\frac{x-3}{x+2}$, unde x este număr real, $x\neq -2$, $x\neq 2$ și $x\neq 3$. Arătați că $E(x)=1$, pentru orice număr real x, unde $x\neq -2$, $x\neq 2$ și $x\neq 3$.

Subiectul III (30 de puncte)

(5p) **1.** *Figura 2* reprezintă schița unui teren în formă de dreptunghi $ABCD$, cu dimensiunile $AB = 30$ m și $BC = 10$ m. Doi frați împart terenul printr-un gard MN, unde $M\in(AB)$ și $N\in(CD)$ astfel încât $MB = ND = 10$ m.

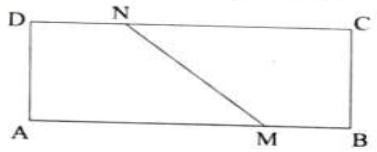


Figura 2

(5p) *a)* Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

(5p) *b)* Arătați că MN împarte terenul în două suprafețe cu ariile egale.

(5p) *c)* Pentru construcția gardului MN sunt folosiți 9 stâlpi. Doi dintre cei 9 stâlpi sunt situați în punctele M și, respectiv, N. Știind că stâlpii sunt așezați la distanțe egale, arătați că distanța dintre doi stâlpi consecutivi este mai mare decât 1,75 m.

2. Acoperișul unei clădiri, reprezentat schematic în *Figura 3*, are forma unei prisme drepte $ABCDEF$ cu $AD = 10$ m, $AB = 6$ m și cu bazele triunghiuri echilaterale.

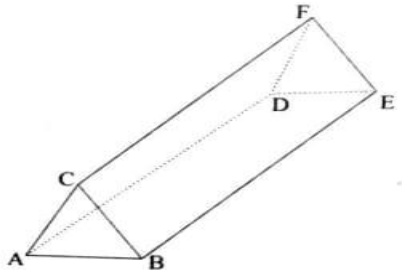


Figura 3

(5p) *a)* Arătați că distanța de la C la AB este egală cu $3\sqrt{3}$ m.

(5p) *b)* Calculați volumul prismei $ABCDEF$.

(5p) *c)* Suprafețele $ADFC$ și $BEFC$ au fost acoperite cu tablă. Aria suprafeței de tablă care a fost cumpărată reprezintă 110% din aria suprafeței care a fost acoperită cu tablă. Determinați câți metri pătrați de tablă s-au cumpărat.

Testul 8 Evaluarea Națională 2014, sesiunea specială (12 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Numărul de 4 ori mai mare decât 7 este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{x}{10}=\frac{9}{5}$, atunci x este egal cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural de două cifre este egal cu ... .

(5p) **4.** Dreptunghiul $ABCD$ are lungimea de 6 cm și lățimea de 5 cm. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ în care $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm și $BF = 5$ cm. Volumul paralelipipedului $ABCDEFGH$ este egal cu ... cm^3.

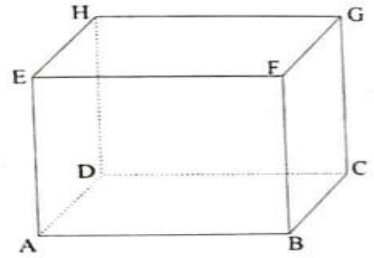


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională.

x	-2	-1	0	1	2
$y=x+2$	0	1	m	3	4

Numărul real m este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=1$.

(5p) **3.** Andrei și Cristina i-au cumpărat împreună un cadou fratelui lor. Andrei a contribuit cu 60% din prețul cadoului, iar Cristina cu restul de 80 de lei. Determinați prețul cadoului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

(5p) *a)* Calculați $f(1)$.

(5p) *b)* Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{(x+2)^2}{x^2+4}-1\right):\frac{x}{x^2+4}$, unde x este număr real, $x\neq 0$.

Arătați că $E(x)=4$, pentru orice număr real x, $x\neq 0$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentată o grădină în formă de dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 8$ m și $AD = 4$ m. Mijloacele laturilor dreptunghiului sunt vârfurile patrulaterului $MNPQ$. Suprafața reprezentată haşurat este plantată cu flori, iar restul grădinii $ABCD$ este acoperită cu gazon.

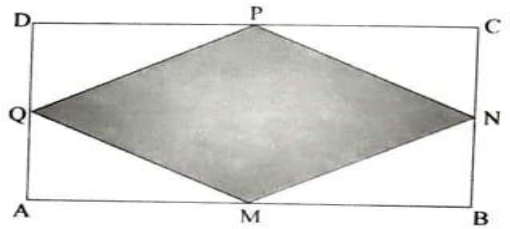


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul grădinii $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că aria suprafeței plantate cu flori este egală cu aria suprafeței acoperite cu gazon.

(5p) ***c)*** Pe fiecare metru pătrat al suprafeței reprezentate haşurat s-au plantat câte 25 de flori. Determinați suma cheltuită pentru cumpărarea florilor plantate în grădină, știind că o floare costă 2,5 lei.

2. Dintr-o bucată de lemn se sculptează o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, reprezentată schematic în *Figura 3*. Piramida are înălțimea de 4 dm, iar baza $ABCD$ are latura $AB = 6$ dm.

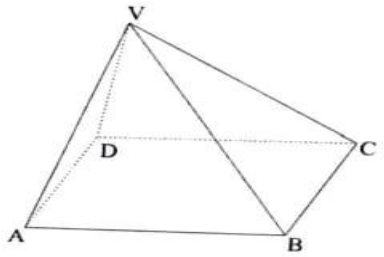


Figura 3

(5p) ***a)*** Calculați aria bazei piramidei $VABCD$.

(5p) ***b)*** Fețele laterale ale piramidei se vopsesc. Arătați că aria suprafeței vopsite este egală cu 60 dm^2.

(5p) ***c)*** Bucata de lemn din care s-a sculptat piramida $VABCD$ avea forma unei prisme drepte cu baza $ABCD$ și înălțimea de 4 dm. Determinați cât la sută din volumul lemnului îndepărtat pentru obținerea piramidei este reprezentat de volumul piramidei.

Testul 9 Evaluarea Națională 2014, simulare (19 februarie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(2^0+2^1+2^2\right):\left(2^3-1\right)$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{7}=\frac{5}{3}$, atunci numărul $\frac{a+7}{7}$ este egal cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea $I=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-5\le x\le 3\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii AC, atunci perimetrul triunghiului AMN este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului determinat de dreptele AD' și $B'C$ este egală cu ...°.

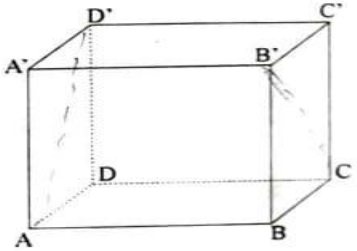


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este dat numărul de elevi din fiecare clasă a VIII-a dintr-o școală, la începutul unui an școlar, respectiv la sfârșitul aceluiași an școlar.

Clasa / Număr de elevi	a VIII-a A	a VIII-a B	a VIII-a C
La începutul anului școlar	24	27	29
La sfârșitul anului școlar	26	25	27

La sfârșitul anului școlar, numărul total al elevilor din clasele a VIII-a ale acestei școli este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC.

(5p) **2.** Determinați numărul natural n, cuprins între 40 și 50, știind că la împărțirea lui prin 6 și prin 8 se obține de fiecare dată restul 1.

(5p) **3.** Matei a cheltuit sâmbătă după amiaza două cincimi din suma pe care o avea dimineața. Duminică, după ce a mai cheltuit încă 13 lei, Matei mai are 8 lei din suma inițială. Determinați suma pe care a avut-o Matei sâmbătă dimineață.

4. Se consideră numerele $a=\sqrt{8}$ și $b=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

(5p) *a)* Verificați dacă $\frac{a+2}{a-2}=b$.

(5p) *b)* Arătați că $a<b$.

(5p) **5.** Se consideră $E(x)=(1+x)(1-x)+(x+2)^2-2(x+2)$, unde x este număr real. Determinați numărul real a pentru care $E(a)=-1$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* este schița unei table de joc $ABCD$, împărțită în 25 de pătrate colorate în alb sau în negru, fiecare pătrat având latura de 2 cm. Pe marginea tablei de joc sunt alese, ca în figură, punctele P, Q, M și N astfel încât $AP=BQ=CM=DN$.

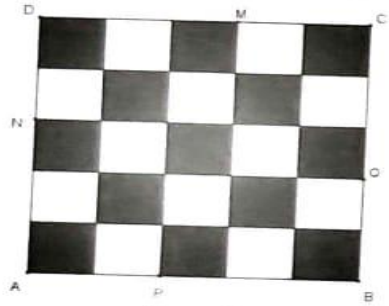


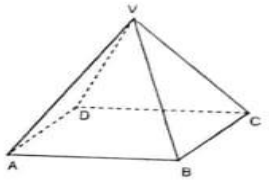
Figura 2

(5p) *a)* Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

(5p) *b)* Arătați că aria tuturor pătratelor albe reprezintă 48% din aria tablei de joc.

(5p) *c)* Demonstrați că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.

2. În *Figura 3* este reprezentat schematic un acoperiș în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$. Înălțimea piramidei este $VO=3\sqrt{2}$ m, iar muchia laterală este $VA=6$ m.



(5p) *a)* Verificați dacă $AB=6$ m.

(5p) *b)* Determinați măsura unghiului format de planele (VAC) și (VBD).

(5p) *c)* Demonstrați că dreptele DM și AN sunt coplanare, știind că M este mijlocul muchiei BV și N este mijlocul muchiei CV.

Testul 10 Evaluarea Națională 2014, Test 1 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Inversul numărului rațional $\frac{11}{2}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Patru kilograme de gutui costă 16 lei. Un kilogram de gutui de aceeași calitate costă ... lei.

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 3 și la 5 dă de fiecare dată restul 2 și câtul diferit de zero este egal cu ... .

(5p) **4.** Un cerc cu raza de 5 cm are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$. Măsura unghiului dintre dreptele AV și AC este egală cu ... °.

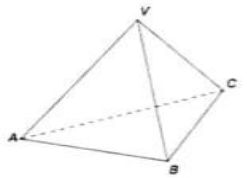
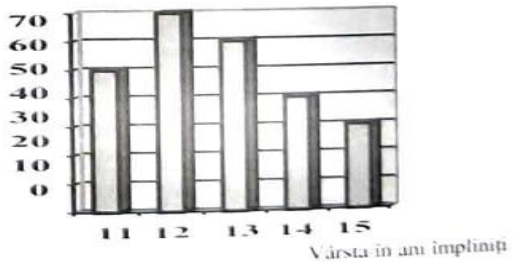


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos este reprezentat numărul de elevi dintr-o școală, pe grupe de vârstă. Numărul elevilor din școală cu vârsta mai mare sau egală cu 14 ani este egal cu ...



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC.

(5p) **2.** Determinați numerele întregi x, știind că $\frac{11}{2x-1}$ este număr întreg.

(5p) **3.** Prețul unei bluze s-a redus cu 10%, iar după reducere bluza costă 162 lei. Calculați prețul bluzei înainte de reducere.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=px+q$, unde p și q sunt numere reale.

(5p) *a)* Determinați numerele reale p și q, știind că $f(1)=1$ și $f(2)=-1$.

(5p) *b)* Pentru $p=-2$ și $q=3$, reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2x-8}{x^2-8x+15}-\frac{1}{x-3}\right):\frac{1}{x^2-25}$, unde x este număr real, $x\neq -5$, $x\neq 3$ și $x\neq 5$. Arătați că $E(x)=x+5$, pentru orice număr real x, $x\neq -5$, $x\neq 3$ și $x\neq 5$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* reprezintă schița unei camere în formă de dreptunghi $ABCD$ cu aria de 48 m^2. Se știe că lățimea reprezintă $\frac{3}{4}$ din lungimea camerei. În interiorul camerei se află un șemineu, reprezentat în schiță de pătratul $MNPD$ cu latura de 1 m. Se montează parchet în cameră, exceptând suprafața hașurată.

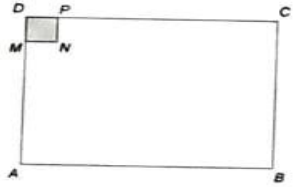


Figura 2

(5p) *a)* Calculați lungimea camerei.

(5p) *b)* Știind că pierderile de material reprezintă 10% din suprafața ce va fi acoperită cu parchet, arătați că este necesar să se cumpere 51,7 m^2 de parchet.

(5p) *c)* Parchetul se vinde ambalat în cutii care conțin fiecare câte 2,5 m^2 de parchet. Prețul fiecărei cutii cu parchet este 135 de lei. Determinați suma minimă necesară pentru cumpărarea parchetului.

2. În *Figura 3* este reprezentat schematic un acvariu în formă de prismă dreaptă, cu baza pătrat, care are latura bazei de 8 dm și muchia laterală de 5 dm. Fețele laterale ale acvariului sunt confecționate din sticlă. Baza acvariului este confecționată dintr-un alt material. Acvariul nu se acoperă. În acvariu se află apă până la înălțimea de 4 dm (se neglijează grosimea sticlei).

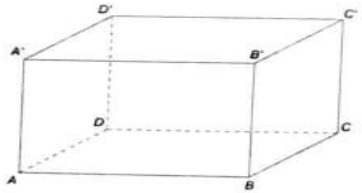


Figura 3

(5p) *a)* Calculați câți litri de apă sunt în acvariu.

(5p) *b)* Calculați câți metri pătrați de sticlă sunt necesari pentru confecționarea a 100 de acvarii care au dimensiunile precizate în enunț.

(5p) *c)* Arătați că în orice moment, distanța dintre doi pești din acvariu este mai mică sau egală cu 12 dm.

Testul 11 Evaluarea Națională 2014, Test 2 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $16-8:2$ este egal cu ... .

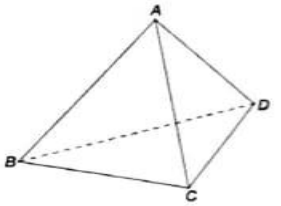
(5p) **2.** Un muncitor, lucrând câte 8 ore pe zi, poate săpa un șanț în 15 zile. Trei muncitori, lucrând câte 8 ore pe zi, sapă același șanț în ... zile.

(5p) **3.** Dacă $A=\{-1,0,1,2\}$ și $B=\{2,3,4\}$, atunci $A\cap B=\{...\}$.

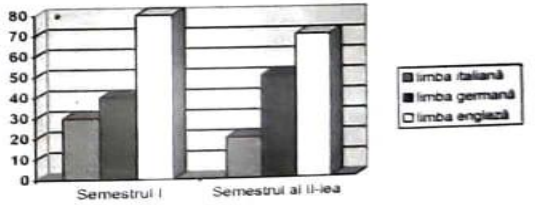
(5p) **4.** Un trapez are bazele de 10 cm și respectiv de 16 cm. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de 8 cm. Aria totală a tetraedrului este egală cu ... cm^2.

Figura 1



(5p) **6.** În graficul de mai jos este reprezentat numărul elevilor unei școli, înscriși la cursuri semestriale de limbi străine. Cel mai mic număr de elevi înscriși la cursurile semestriale de limbi străine s-a înregistrat în semestrul ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$.

(5p) **2.** Calculați media aritmetică a numerelor $a=8-3\sqrt{7}+\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{7}\right)^2$ și $b=24$.

(5p) **3.** O firmă are 120 de angajați. Determinați numărul bărbaților angajați în firmă, știind că numărul femeilor reprezintă 20% din numărul bărbaților.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

(5p) *a)* Determinați numărul real a știind că $f(a)=7$.

(5p) *b)* Calculați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f, axa Ox și axa Oy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\frac{(x+4)\cdot(3x-2)-3(x+1)^2+11}{4x^3(x+1)}:\frac{1}{x^2(x+1)}$, unde x este număr real, $x\neq -1$ și $x\neq 0$. Arătați că $E(x)=1$, pentru orice număr real x, $x\neq -1$ și $x\neq 0$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

(5p) **1.** *Figura 2* reprezintă schița unui teren format dintr-un pătrat și patru semicercuri. Lungimea laturii pătratului este egală cu 10 m. Terenul este înconjurat de un gard.

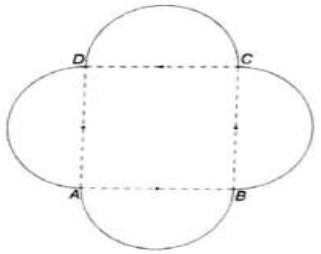


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați lungimea gardului.

(5p) ***b)*** Arătați că aria întregului teren este egală cu $50(\pi+2)$ m^2.

(5p) ***c)*** Pe teren se vor planta trandafiri. Știind că fiecărui trandafir îi este necesară o suprafață de 25 dm^2, verificați dacă pe acest teren pot fi plantați 1028 de trandafiri. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

2. În *Figura 3* este reprezentată schematic o cutie din carton, în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei de 60 cm și de 40 cm, iar înălțimea de 50 cm (se neglijează grosimea cartonului).

(5p) ***a)*** Calculați câți metri pătrați de carton sunt necesari pentru a confecționa cutia.

(5p) ***b)*** Verificați dacă în cutie încap 125 de cuburi egale, fiecare având muchia de 10 cm.

(5p) ***c)*** Pe fețele laterale ale cutiei $ABCDA'B'C'D'$, între punctul A și punctul C', se aplică o bandă adezivă de lungime minimă. Calculați lungimea benzii aplicate.

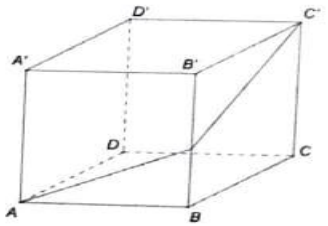


Figura 3

Testul 12 Evaluarea Națională 2014, Test 3 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $4+5\cdot(12-3\cdot4)$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Cel mai mare număr din mulțimea $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 2\}$ este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă 8 kg de pere costă 24 de lei, atunci 4 kg de pere de aceeași calitate costă ... lei.

(5p) **4.** O linie mijlocie a unui triunghi echilateral este de 6 cm. Perimetrul triunghiului echilateral este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentată o piramidă patrulateră regulată care are muchia bazei de 10 cm și muchia laterală de 13 cm. Apotema piramidei este de ... cm.

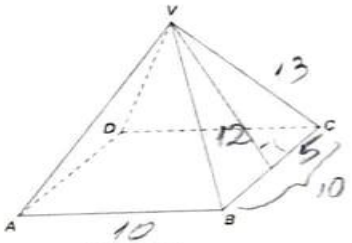
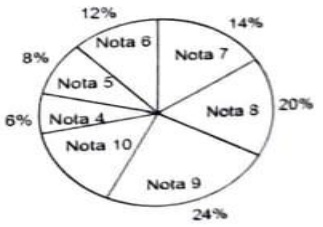


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevii unei școli la un test.



Nota 10 a fost obținută de ... % din numărul elevilor care au susținut testul.

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Un vapor a plecat din portul A spre portul B dimineața la ora 7. În aceeași dimineață, la aceeași oră, pe același traseu, din portul B a plecat spre portul A o șalupă care se deplasează cu viteza de două ori mai mare decât cea a vaporului. Șalupa și vaporul s-au întâlnit în acea zi la ora 12. Determinați ora sosirii vaporului în portul B.

(5p) **3.** Matei a cheltuit pentru cumpărarea unor caiete cu 1 leu mai puțin decât jumătate din suma pe care o avea la el. Apoi, Matei a cumpărat o carte cu o treime din banii rămași și cu încă 5 lei. După cumpărarea caietelor și a cărții, lui Matei i-au mai rămas 29 de lei. Calculați suma inițială pe care o avea Matei la el.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Determinați numărul real a știind că punctul $T(a, 2a+4)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră $E(x) = x^2 + (x\sqrt{3}+1)^2 - (2x-1)^2 - 2x(\sqrt{3}+2)$. Arătați că $E(x) = 0$ pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este schița unui teren în formă de dreptunghi $ABCD$ care are lățimea AD de 30 m. Distanța de la punctul A la dreapta BD este egală cu 24 m.

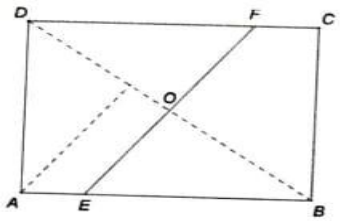


Figura 2

(5p) *a)* Arătați că distanța de la punctul B la punctul D este de 50 m.

(5p) *b)* Calculați cât la sută dintr-un hectar reprezintă aria terenului $ABCD$.

(5p) *c)* Terenul $ABCD$ este împărțit în două parcele de un gard (EF), astfel încât dreapta EF este mediatoarea segmentului BD. Calculați lungimea gardului (EF).

2. În *Figura 3* este reprezentată schematic o piscină în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile bazei de 50 m și 25 m. Adâncimea piscinei este de 2,5 m.

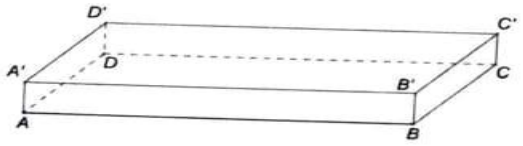


Figura 3

(5p) *a)* Calculați câți litri de apă sunt necesari pentru a umple complet piscina.

(5p) *b)* Calculați numărul minim de plăci de faianță, în formă de pătrat cu latura de 50 cm, necesare pentru a acoperi pereții laterali ai piscinei.

(5p) *c)* Arătați că cea mai mică distanță dintre orice punct situat pe marginea superioară a piscinei și centrul bazei $ABCD$ a piscinei este mai mică de 13 m.

Testul 13 Evaluarea Națională 2014, Test 4 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $515 : 5$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $3x-1 \le 8$ este intervalul ... .

(5p) **3.** O echipă de 8 muncitori poate termina o lucrare în 4 zile. Dacă numărul muncitorilor din echipă se dublează, atunci aceeași lucrare poate fi terminată în ... zile.

(5p) **4.** Un pătrat cu lungimea laturii de 3 cm are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat cubul $ALGORITM$. Măsura unghiului dintre dreptele LT și AL este egală cu ... °

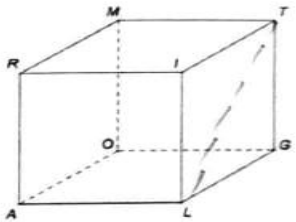
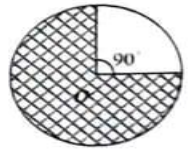


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos, porțiunea hașurată reprezintă ... % din suprafața discului de centru O.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC.

(5p) **2.** O cutie conține 22 de bomboane. Mama împarte bomboane din cutie, în mod egal, celor 4 copii ai ei. Determinați numărul minim de bomboane care rămân în cutie.

(5p) **3.** Determinați două numere reale pozitive, știind că produsul lor este egal cu 16 și valoarea raportului lor este egală cu 4.

4. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$.

(5p) *a)* Calculați $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$.

(5p) *b)* Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră $E(x) = \left(x\sqrt{2}+1\right)^2 - \left(x\sqrt{2}+1\right)\left(x\sqrt{2}-1\right) - 2x\sqrt{2}$. Arătați că $E(x) = 2$ pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* reprezintă schița terasei unui bloc. *ABCD* și *EFGH* sunt dreptunghiuri, *BC* și *EF* sunt perpendiculare, $BC = HE = 40$ m, $AB = EF = 20$ m și $ME = EN = 10$ m.

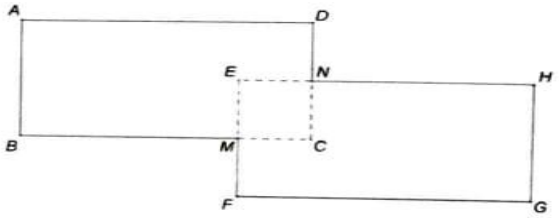


Figura 2

(5p) ***a)*** Arătați că aria suprafeței terasei este egală cu 1500 m^2.

(5p) ***b)*** Se acoperă toată suprafața terasei cu trei straturi de folie hidroizolantă. Pentru fiecare strat, suprafața foliei utilizate este egală cu suprafața terasei plus 10% din suprafața acesteia. Câți metri pătrați de folie sunt necesari pentru efectuarea întregii lucrări?

(5p) ***c)*** Arătați că dacă o persoană se deplasează în linie dreaptă între două puncte oarecare ale terasei, distanța astfel parcursă este mai mică decât 80 m.

2. În *Figura 3* este reprezentată schematic o cutie în formă de cub *ABCDA'B'C'D'* cu muchia de 60 cm. Capacul *ABCD* se poate roti în jurul muchiei *BC*.

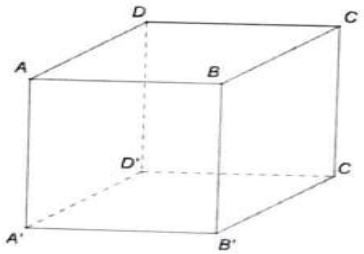


Figura 3

(5p) ***a)*** Calculați aria totală a cutiei.

(5p) ***b)*** Determinați numărul maxim de cubulețe cu muchia de 4 cm, care pot fi așezate în cutie, astfel încât capacul ei să se poată închide.

(5p) ***c)*** Deschidem capacul cutiei în poziția *BCMN*, astfel încât $m(\sphericalangle ABN) = 45°$ și îl fixăm cu tija *AN*. Arătați că lungimea tijei este mai mare de $30\sqrt{2}$ cm.

Testul 14 Evaluarea Națională 2014, Test 5 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{64} : 4$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Un pix costă 5 lei. După o reducere cu 20%, prețul pixului este de ... lei.

(5p) **3.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 30 și 45 este egal cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral cu latura de 2 cm are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentată piramida triunghiulară regulată *VABC*. Dacă $AV + AB = 22$ cm, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este egală cu ... cm.

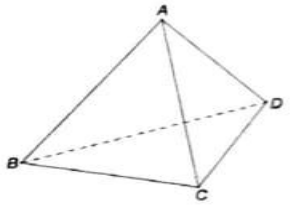
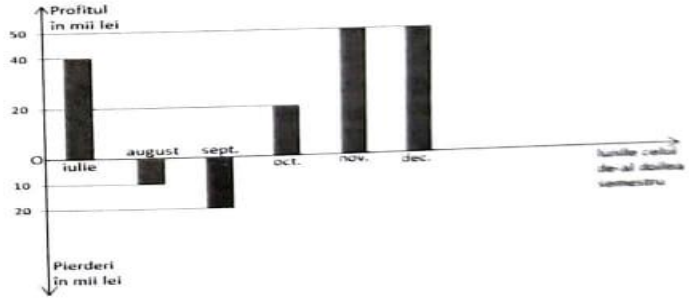


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate profiturile sau pierderile lunare ale unei firme în cel de-al doilea semestru al unui an. Numărul lunilor din al doilea semestru în care firma a înregistrat pierderi este egal cu ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC.

(5p) **2.** Se consideră numere reale $a = \frac{1}{\sqrt{5}+2} + \frac{1}{3+\sqrt{8}}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{1}{3-\sqrt{8}}$. Arătați că $a + b = 6 + 2\sqrt{5}$.

(5p) **3.** Suma dintre jumătatea unui număr real pozitiv x și $\frac{9}{2}$ este egală cu dublul numărului x. Determinați numărul x.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde a și b sunt numere reale pentru care $f(-1)=-5$ și $f(0)=-2$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) ***b)*** Arătați că $f(1)=1$.

(5p) **5.** Simplificați raportul $\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$ prin $x-3$, unde x este număr real, $x\neq -3$ și $x\neq 3$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În *Figura 2* sunt reprezentate schițele a două suprafețe agricole. Suprafața $ABCD$ are forma unui romb cu $AB=4$ dam și $m(\sphericalangle BAD)=30^\circ$, iar suprafața $MNPQ$ este un pătrat.

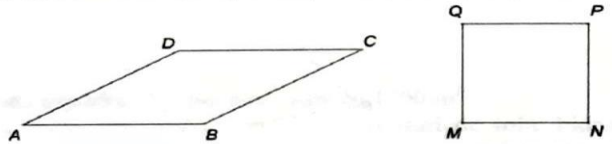


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul rombului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că înălțimea rombului este de 2 dam.

(5p) ***c)*** Dacă ariile suprafețelor $ABCD$ și $MNPQ$ sunt egale, arătați că latura rombului și diagonala pătratului au aceeași lungime.

2. *Figura 3* reprezintă schematic un acoperiș în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia laterală $VA=26$ m și latura bazei $AB=20$ m.

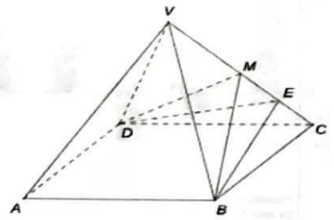


Figura 3

(5p) ***a)*** Calculați aria laterală a piramidei $VABCD$.

(5p) ***b)*** Un alpinist utilitar se deplasează din punctul B spre muchia CV pe drumul cel mai scurt $[BE]$. Arătați că dreptele DE și CV sunt perpendiculare.

(5p) ***c)*** Pentru efectuarea unor reparații, alpinistul utilitar parcurge, în linie dreaptă, traseul de la punctul E la punctul $M\in(CV)$ astfel încât $CM=\dfrac{200}{13}$ m și apoi parcurge traseul de la punctul M la punctul D. Calculați lungimea traseului $EM+MD$.

Testul 15 Evaluarea Națională 2014, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $7\cdot 3+14:2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Patru caiete de același tip costă 8 lei. Trei caiete de același tip costă ... lei.

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural par care aparține intervalului $(-2,3]$ este numărul ... .

(5p) **4.** Perimetrul unui pătrat este egal cu 20 cm. Aria pătratului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$ în care $BC=6$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului regulat $ABCD$ este egală cu ... cm.

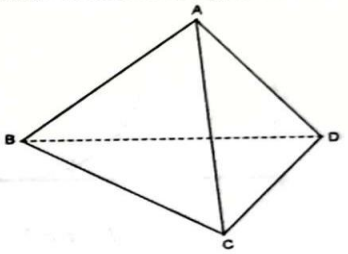


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase, după sportul la care sunt înscriși în cadrul unui club sportiv.

Tip de activitate	volei	baschet	tenis	handbal
Număr de elevi	10	7	4	5

Numărul elevilor din clasă care sunt înscriși la volei este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Calculați media aritmetică a numerelor a și b, știind că $a=\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{7}$ și $b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{7}$.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 27 de elevi. Numărul băieților din clasă reprezintă 80% din numărul fetelor din clasă. Determinați numărul băieților din acea clasă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

(5p) ***a)*** Arătați că $f(-2)+f(2)=-8$.

(5p) ***b)*** Determinați aria triunghiului OAB, unde O este originea sistemului de coordonate xOy, A este punctul de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu 2, iar B este punctul de pe graficul funcției f care are ordonata egală cu 2.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}:\dfrac{(x-1)^2-x(x-2)}{x^2+1}$, unde x este număr real.

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $E(x)=1$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. *Figura 2* este schița unei zone de agrement în formă de dreptunghi $ABCD$, cu lungimea $AB = 30$ m și lățimea $BC = 20$ m. În interiorul zonei de agrement se află un lac în formă de cerc cu raza de 10 m. Cercul intersectează latura AB în punctul P și latura BC în punctul M, astfel încât $PB = BM = MC$.

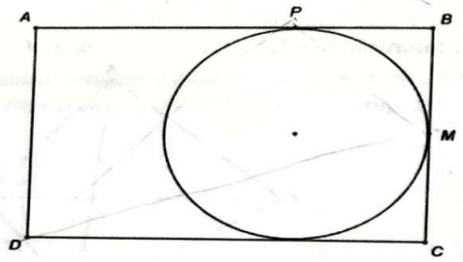


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați aria suprafeței lacului.

(5p) ***b)*** Determinați aria triunghiului DPM.

(5p) ***c)*** În exteriorul lacului, zona de agrement este acoperită cu gazon. Verificați dacă aria suprafeței acoperite cu gazon este mai mică decât aria suprafeței lacului. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

2. În *Figura 3* este reprezentat schematic un cort în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$, în care $VA = AB = 4$ m. Intersecția diagonalelor AC și BD se notează cu O.

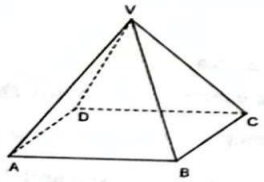


Figura 3

(5p) ***a)*** Arătați că $OA = OV$.

(5p) ***b)*** Calculați câți metri pătrați de pânză sunt necesari pentru confecționarea cortului, știind că toate fețele sunt din pânză, inclusiv podeaua. Se neglijează pierderile de material.

(5p) ***c)*** Determinați distanța de la punctul O la o față laterală a piramidei patrulatere regulate $VABCD$.

Testul 16 Evaluarea Națională 2013 (27 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $4 \cdot 4 + 10$ este egal cu...

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{6} = \frac{5}{2}$ atunci numărul a este egal cu ...

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $(3, 9]$ este numărul ...

(5p) **4.** Perimetrul unui pătrat cu latura de 8 cm este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat cubul $ABCDEFGH$ cu latura de 3 cm. Volumul cubului este egal cu ... cm^3.

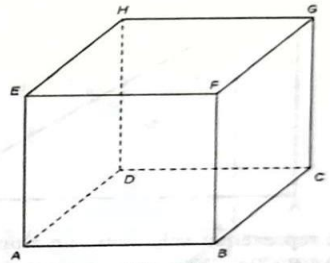


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute la un test de elevii unei clase.

Notă	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	0	1	3	1	4	5	6	5	4	1

La acest test nota 8 a fost obținută de un număr de ... elevi

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârful S și baza ABC.

(5p) **2.** Arătați că $\sqrt{2} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2} = 0$.

(5p) **3.** Ana și Bogdan au împreună 7 mere, iar Ana și Călin au împreună 8 mere. Determinați câte mere are Ana, știind că, împreună, cei trei copii au 12 mere.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

(5p) ***a)*** Calculați $f(0) + f(-2)$.

(5p) ***b)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}\right) : \frac{2}{(x-2)(x+2)}$, unde x este număr real, $x \neq -2$ și $x \neq 2$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru orice x, $x \neq -2$ și $x \neq 2$.

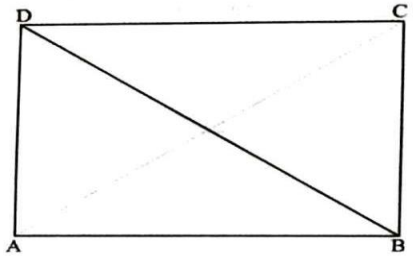
Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura 2 este reprezentat un loc de joacă în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AD = 20$ m și diagonala $BD = 40$ m.

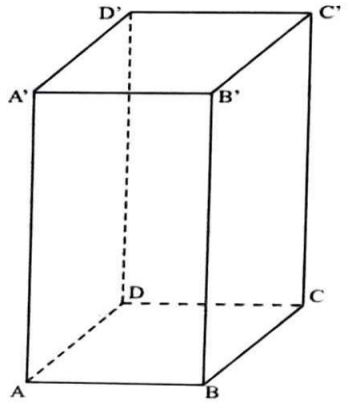
(5p) ***a)*** Arătați că $AB = 20\sqrt{3}$ m.

(5p) ***b)*** Verificați dacă unghiul dintre diagonalele dreptunghiului $ABCD$ are măsura egală cu $60°$.

(5p) ***c)*** Arătați că aria suprafeței locului de joacă este mai mică decât 700 m^2. Se consideră cunoscut faptul că $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.



2. În Figura 3 este reprezentat schematic un stup de albine în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dimensiunile stupului sunt $AB = 4$ dm, $BC = 6$ dm și $AA' = 8$ dm.



(5p) ***a)*** Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Determinați aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) ***c)*** Arătați că $PQ = \sqrt{13}$ dm, unde $\{P\} = AB' \cap A'B$ și $\{Q\} = BC' \cap B'C$.

Testul **17** Evaluarea Națională 2013, subiect de rezervă (27 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $6 \cdot 2 + 6$ este egal cu...

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{15} = \frac{2}{5}$, atunci numărul a este egal cu...

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural care aparține intervalului $[10, 13)$ este numărul ...

(5p) **4.** Aria unui triunghi care are o latură de 6 cm și înălțimea corespunzătoare ei de 5 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentată o prismă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral. Dacă $AB = AA' = 5$ cm, atunci perimetrul patrulaterului $ABB'A'$ este egal cu ...cm.

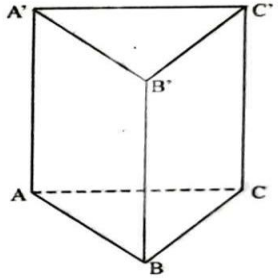


Figura 1

(5p) **6.** Membrii ansamblului folcloric al unei școli sunt grupați după vârstă astfel:

Vârstă (ani)	11	12	13	14
Număr de elevi	10	9	8	9

Numărul elevilor din ansamblu cu vârsta de 13 ani este egal cu .... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Arătați că $\sqrt{3} + \sqrt{12} - 3\sqrt{3} = 0$.

(5p) **3.** Determinați numerele reale a și b, $a > b$, știind că suma lor este egală cu 10, iar diferența lor este egală cu 2.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

(5p) ***a)*** Calculați $f(0) + f(-1)$.

(5p) ***b)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(x - 1 - \frac{x^2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x+2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$ și $x \neq 2$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru orice număr real x, $x \neq -2$ și $x \neq 2$.

Subiectul III (30 de puncte)

(5p) **1.** Figura 2 reprezintă schița unei grădini în formă de dreptunghi $ABCD$ cu lungimea $AB = 8$ m și lățimea $BC = 6$ m. Punctul M este mijlocul segmentului AB, punctul P este mijlocul segmentului AD, iar punctul N este situat pe segmentul DC, astfel încât $NC = 3$ m. Zona haşurată reprezintă partea din grădină acoperită cu gazon, iar zona nehaşurată reprezintă partea din grădină unde sunt plantate flori.

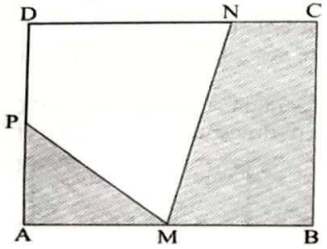


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că aria suprafeței acoperită cu gazon este egală cu 27 m^2.

(5p) ***c)*** Verificați dacă aria suprafeței pe care sunt plantate flori este egală cu aria trapezului $MBCN$.

2. În Figura 3 este reprezentată schematic o piatră semiprețioasă în formă de piramidă triunghiulară regulată $ABCD$, cu baza triunghiul BCD. Se știe că $m(\sphericalangle CAD) = 90°$, iar $CD = 4$ cm.

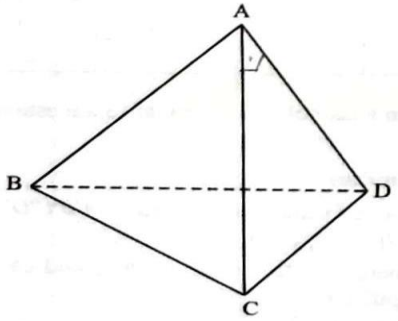


Figura 3

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul triunghiului BCD.

(5p) ***b)*** Arătați că aria suprafeței laterale este egală cu 12 cm^2.

(5p) ***c)*** Introducem piatra semiprețioasă într-un vas plin cu apă. Arătați că, la scufundarea completă a pietrei, din vas se varsă mai puțin de 4 mililitri de apă. Se consideră cunoscut faptul că $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

Testul 18 Evaluarea Națională 2013, sesiunea specială (5 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2 \cdot 3 + 8$ este egal cu...

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{8} = \frac{3}{2}$, atunci numărul a este egal cu ...

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural care aparține intervalului $[3, 5)$ este numărul....

(5p) **4.** Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 7 cm și lățimea de 4 cm este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Aria pătratului $ABCD$ este egală cu 9 cm^2. Aria totală a cubului este egală cu ... cm^2.

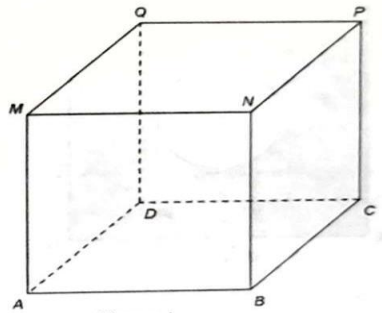


Figura 1

(5p) **6.** Elevii claselor a VIII-a dintr-o școală au fost chestionați cu privire la opțiunile lor pentru clasa a IX-a. Rezultatele chestionarului sunt reprezentate în diagrama de mai jos. Numărul elevilor care au optat pentru profilul real este egal cu ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen un tetraedru regulat $ABCD$.

(5p) **2.** Calculați media aritmetică a numerelor a și b, știind că $a = \frac{1}{3} + \frac{12}{5}$ și $b = \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$.

(5p) **3.** Prețul inițial al unui produs este 1000 de lei. Calculați prețul produsului după o ieftinire cu 10% din prețul inițial.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

(5p) ***a)*** Calculați $f(0)+f(2)$.

(5p) ***b)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x+1}{2x}-\frac{x-1}{3x}\right)\cdot\frac{6x}{x+5}$, unde x este număr real, $x\neq -5$ și $x\neq 0$. Arătați că $E(x)=1$, pentru orice număr real x, $x\neq -5$ și $x\neq 0$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura 2 este schița unei ferme piscicole în formă de pătrat care are în interior un iaz, reprezentat prin cercul de centru O, unde O este intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$. Cercul are raza de 25 m, iar pătratul $ABCD$ are latura de 100 m.

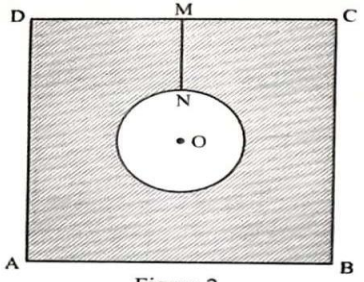


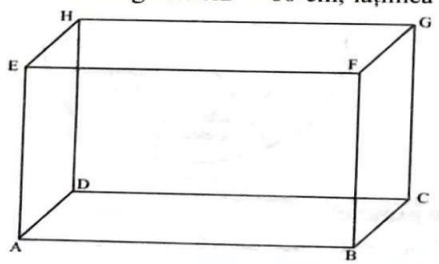
Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că aria suprafeței de teren haşurată în schiță este egală cu $625(16-\pi)$ m^2.

(5p) ***c)*** De cinci ori pe zi se verifică starea iazului. Pentru aceasta, un angajat intră în fermă prin poarta de acces situată în punctul M, mijlocul segmentului CD, ajunge la iaz în punctul N, ocolește iazul și, după ce ajunge din nou în punctul N, se întoarce în punctul M. Știind că punctele M, N și O sunt coliniare, arătați că, într-o zi, angajatul parcurge mai mult de un kilometru. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14<\pi<3{,}15$.

2. În Figura 3 este reprezentat schematic un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ cu lungimea $AB=60$ cm, lățimea $BC=24$ cm și înălțimea $AE=40$ cm.



(5p) ***a)*** Calculați aria dreptunghiului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că volumul paralelipipedului este egal cu 57 600 cm^3.

(5p) ***c)*** Determinați câți litri de apă sunt în acvariu dacă nivelul apei este de 30 cm.

Testul 19 Evaluarea Națională 2013, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9-3:3$ este egal cu....

(5p) **2.** Numărul natural nenul n pentru care $\frac{3}{n}=\frac{1}{3}$ este egal cu...

(5p) **3.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,4,6,8\}$ și $B=\{2,4,6,8,9\}$. Mulțimea $A\setminus B$ este egală cu $\{\ldots\}$

(5p) **4.** Aria pătratului cu latura de 7 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ din Figura 1. Suma lungimilor tuturor muchiilor sale este egală cu 54 cm. Lungimea unei muchii este egală cu ... cm.

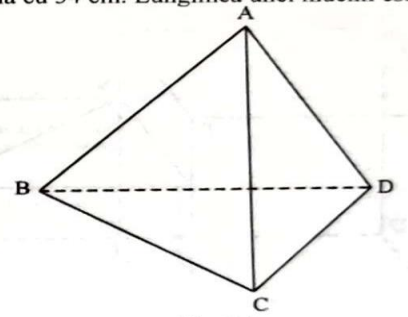


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentat numărul de elevi repartizați pe grupe de vârstă, membri ai corului unei școli.

Vârsta (ani)	11	12	13	14
Număr elevi	10	10	11	9

Numărul elevilor din cor cu vârsta de cel puțin 12 ani este egal cu...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor $a=\sqrt{81}-3\sqrt{3}+\sqrt{27}$ și $b=\left|2-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

(5p) **3.** Suma a două numere reale este egală cu $1{,}(6)$ și diferența lor este egală cu $0{,}(3)$. Determinați cele două numere.

4. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,m)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}$, unde x este număr real, $x\neq 1$. Arătați că $E(x)=1$, pentru orice x număr real, $x\neq 1$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

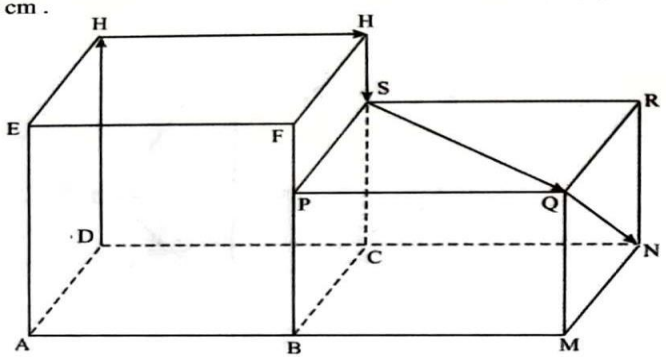
1. O bază de agrement are un patinoar în formă de dreptunghi $ABCD$ cu lungimea egală cu dublul lățimii și aria de 1250 m^2.

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul patinoarului.

(5p) ***b)*** Calculați lungimea diagonalei (AC).

(5p) ***c)*** Oana patinează, în linie dreaptă, din punctul A până în punctul C și, tot în linie dreaptă, revine în punctul A. Mihai patinează de-a lungul fiecărei laturi a patinoarului plecând din A, făcând un tur complet al acestuia și ajungând din nou în A. Arătați că distanța parcursă de Mihai este mai mare decât distanța parcursă de Oana.

2. Pe o masă sunt așezate, ca în Figura 2, un vas $ABCDEFGH$, în formă de cub cu muchia de 12 cm și o cutie $BMNCPQRS$ în formă de paralelipiped cu $BP = 9$ cm și $BM = 16$ cm.



(5p) ***a)*** Arătați că vasul $ABCDEFGH$ și cutia $BMNCPQRS$ au același volum.

(5p) ***b)*** O furnică parcurge traseul $D \to H \to G \to S \to Q \to N$. Calculați lungimea traseului.

(5p) ***c)*** În vasul în formă de cub se toarnă un litru de apă. Arătați că înălțimea la care se ridică apa în vas este mai mică de 7 cm.

Testul 20 Evaluarea Națională 2012 (27 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12 + 12 : 4$ este egal cu...

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 7 și 23 este egală cu ...

(5p) **3.** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \leq 4\}$. Mulțimea A este egală cu intervalul ...

(5p) **4.** Perimetrul unui romb cu latura de 4 cm este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat cubul $ABCDEFGH$ cu muchia de 5 cm. Aria totală a cubului este egală cu ... cm^2.

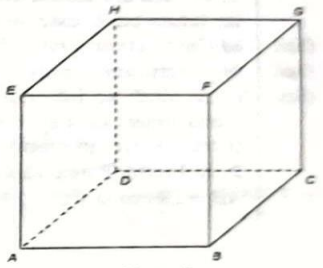
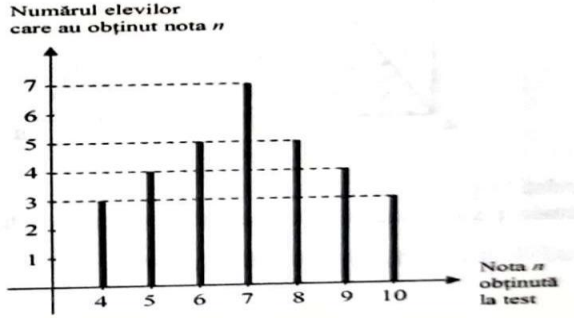


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la un test. Numărul elevilor din clasă care au obținut la test cel puțin nota 8 este egal cu...



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Se consideră numerele $a = \dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$ și $b = \sqrt{15} : \sqrt{3} + 1$. Calculați media geometrică a celor două numere.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 26 de elevi. Dacă din clasă ar pleca două fete și trei băieți, atunci numărul fetelor ar fi egal cu dublul numărului băieților. Determinați numărul fetelor din clasă.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, -a)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(1 + \dfrac{2-x}{x+1}\right) : \dfrac{x-1}{(2x+1)^2 - (x+2)^2}$, unde x este număr real, $x \neq 1$ și $x \neq -1$. Arătați că $E(x) = 9$, pentru orice x număr real, $x \neq 1$ și $x \neq -1$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O vază are forma unei prisme drepte cu baza pătrat. Înălțimea vazei este de 40 cm, iar latura bazei este de 10 cm. În vază se toarnă trei litri de apă.

(5p) ***a)*** Calculați aria laterală a vazei.

(5p) ***b)*** Determinați înălțimea la care se ridică apa în vază.

(5p) ***c)*** În vază se introduc patru cuburi din piatră, fiecare cub având muchia de 4cm. Determinați cu câți centimetri crește nivelul apei din vază, după introducerea celor patru cuburi din piatră.

2. În Figura 2 este reprezentată schematic o placă de gresie în formă de dreptunghi, cu $AB = 28$ cm și $BC = 21$cm.

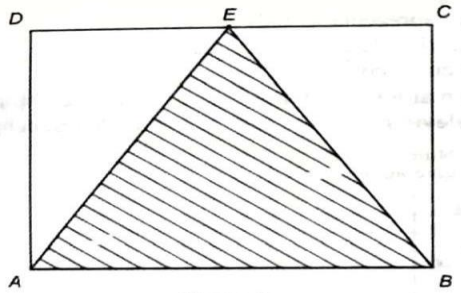


Figura 2

(5p) ***a)*** Calculați lungimea segmentului (DB).

(5p) ***b)*** Determinați aria triunghiului EAB, unde E este mijlocul laturii (CD).

(5p) ***c)*** Arătați că sinusul unghiului AEB este egal cu $\frac{12}{13}$.

Testul 21 Evaluarea Națională 2012, subiect de rezervă (27 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12 - 6 : 3$ este egal cu ...

(5p) **2.** Dacă y este un număr real nenul și $\frac{3}{y} = \frac{x}{4}$, atunci produsul $x \cdot y$ este egal cu ...

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural din intervalul $(0,6)$ este egal cu ...

(5p) **4.** Un romb cu perimetrul de 32 cm are lungimea unei laturi egală cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$. Dacă o muchie are lungimea de 5 cm, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu ... cm.

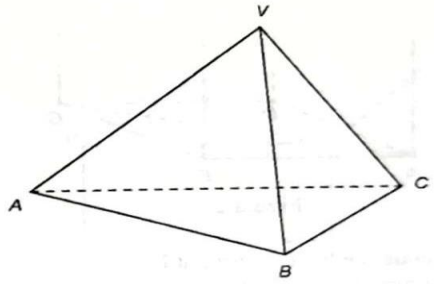


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor dintr-o echipă de fotbal după înălțimile lor măsurate în centimetri.

Înălțimea (cm)	140 – 149	150 – 159	160 – 170
Număr elevi	2	3	6

Numărul elevilor din echipă cu înălțimea mai mică decât 160 cm este egal cu ...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Arătați că numărul $a = \left|\sqrt{5} - 3\right| + \frac{4}{3 - \sqrt{5}}$ este întreg.

(5p) **3.** Numărul păsărilor dintr-o gospodărie este mai mare decât 70, dar mai mic decât 80. O treime din numărul păsărilor sunt găini, un sfert din numărul păsărilor sunt rațe și restul sunt gâște. Determinați numărul gâștelor din gospodărie.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-7)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$, unde x este număr real, $x \neq 0$.

Arătați că $E(x) = -2$, pentru orice număr real x, $x \neq 0$

Subiectul III **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În Figura 2 este reprezentat ambalajul unei cutii de lapte care are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDMNPQ$, în care $AM = 10$ cm, $AB = 6$ cm și $BC = 5$ cm

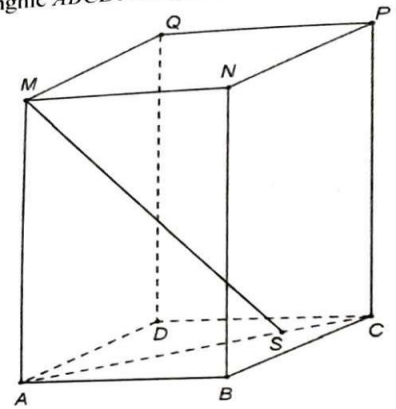


Figura 2

(5p) *a)* Calculați volumul cutiei de lapte, exprimat în litri.

(5p) *b)* Calculați aria, exprimată în centimetri pătrați, a suprafeței de material necesar pentru un ambalaj, știind că pierderile la îmbinări reprezintă 10% din aria totală a cutiei.

(5p) *c)* Se introduce în cutie un pai, prin vârful M, până în punctul $S \in (AC)$, fără să cadă în cutie, astfel încât $AS = 7{,}5$ cm. Arătați că lungimea paiului este mai mare de 12 cm.

2. Figura 3 reprezintă schița unei mese formate dintr-un dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 4$ m și $BC = 2$ m și două semicercuri cu diametrele $[AD]$, respectiv $[BC]$.

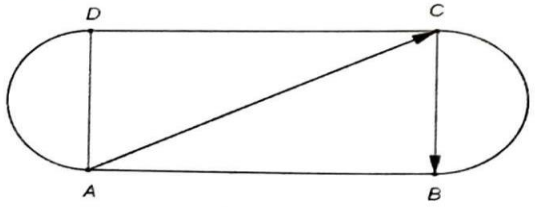


Figura 3

(5p) *a)* De-a lungul marginii mesei se lipește o bandă protectoare. Determinați lungimea acestei benzi.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței mesei.

(5p) *c)* O buburuză parcurge, mergând doar pe marginea mesei, traseul $A - B - C$, iar o furnică parcurge segmentul $[AC]$ și, în continuare, segmentul $[CB]$. Arătați că lungimea traseului parcurs de buburuză este mai mare decât lungimea traseului parcurs de furnică. ($3{,}14 < \pi < 3{,}15$)

Testul 22 Evaluarea Națională 2012, sesiunea specială (6 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $18 - 12 : 3$ este egal cu ...

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 17 și 23 este egală cu ...

(5p) **3.** Un sfert din lungimea unui drum reprezintă 12 km. Lungimea drumului este egală cu ... km.

(5p) **4.** Suma dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este egală cu 10 cm. Perimetrul acestui dreptunghi este egal cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră cubul $ABCDMNPQ$ din Figura 1. Măsura unghiului dintre dreptele AB și DQ este egală cu ....°

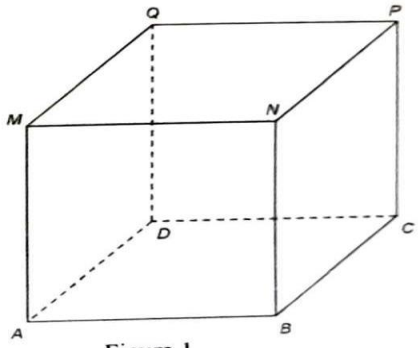


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase după înălțimile lor, măsurate în centimetri.

Înălțimea (cm)	120 – 129	130 – 139	140 – 149	150 – 160
Număr elevi	2	3	15	5

Numărul elevilor care au înălțimea mai mică de 140 cm este egal cu ...

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Arătați că $a = 2 \cdot (8 + \sqrt{18}) - 3 \cdot (4 + \sqrt{8})$ este număr întreg.

(5p) **3.** Un pix și o carte costă 10 lei, cartea și un caiet costă 9 lei, iar caietul și pixul costă 5 lei. Determinați prețul cărții.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 3x$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Determinați numărul real p pentru care punctul $A(p, p + 4)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(2 - \frac{8}{x+2}\right) : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$, pentru orice număr real x, $x \neq -2$ și $x \neq 2$. Arătați că $E(x) = 2$, pentru orice număr real x, $x \neq -2$ și $x \neq 2$

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În Figura 2 este reprezentat schematic un turn format din prisma dreaptă $ABCDMNPQ$ cu baza pătrat și piramida patrulateră regulată $SMNPQ$. Se știe că $AB = 5$m, $AM = 12$m și $m(\sphericalangle MSN) = 60°$.

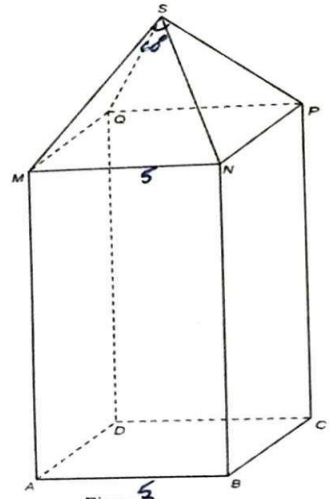


Figura 2

(5p) *a)* Calculați distanța dintre punctele D și M.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a piramidei $SMNPQ$.

(5p) *c)* Arătați că înălțimea turnului este mai mică decât 16 m.

2. Dreptunghiul $ABCD$ din Figura 3 reprezintă schița unei mese de biliard. Dimensiunile mesei sunt $AB = 12$ dm și $BC = 18$ dm

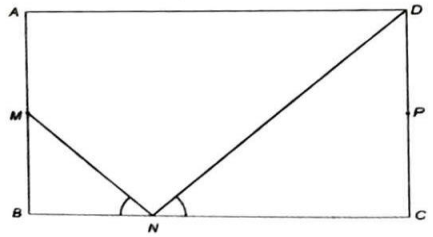


Figura 3

(5p) *a)* Calculați aria dreptunghiului $ABCD$, exprimată în metri pătrați.

(5p) *b)* Determinați perimetrul triunghiului APB, unde P este mijlocul segmentului (CD).

(5p) *c)* O bilă se află în punctul M, mijlocul laturii (AB). Un jucător lovește bila care atinge latura (BC) în punctul N și apoi ajunge în punctul D. Știind că unghiurile MNB și CND sunt congruente, arătați că dreptele MN și ND sunt perpendiculare.

Testul 23 Evaluarea Națională 2012, model subiect www.edu.ro

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10 - 10 : 5$ este egal cu ....

(5p) **2.** Numerele întregi din intervalul $[-5,4]$ sunt în număr de ...

(5p) **3.** Cincizeci de kilograme de castraveți costă 200 lei. Cinci kilograme de castraveți de aceeași calitate costă ... lei.

(5p) **4.** Un trapez cu înălțimea de 8 cm și linia mijlocie de 10 cm are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Dacă aria totală a cubului este egală cu 600 cm^2, atunci muchia cubului este de ... cm

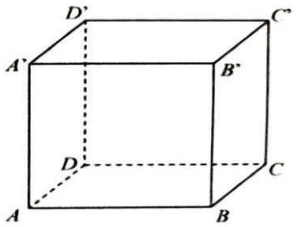


Figura 1

(5p) **6.** Numărul elevilor dintr-un lot de atletism și vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârsta (ani)	11	12	13	14
Număr elevi	9	4	5	2

Numărul elevilor din lot este egal cu ...

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCMNP$ cu baza ABC triunghi echilateral.

(5p) **2.** Calculați $5a - 11b + 21c$, știind că $2a + b - 3c = 15$ și $a - 4b + 8c = 25$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5p) **3.** Maria a citit în 5 zile o carte care are 230 de pagini. În fiecare zi, începând cu a doua, Maria a citit cu trei pagini mai mult decât în ziua precedentă. În a câta zi numărul total de pagini citite în ziua respectivă este un număr prim?

4. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 5$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Calculați aria triunghiului determinat de reprezentările grafice ale celor două funcții și axa Oy.

(5p) **5.** Calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$, știind că $x + \frac{1}{x} = 3$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Laboratorul unei cofetării prepară bomboane în formă de piramidă triunghiulară regulată cu muchia laterală de 2 cm și cu muchia bazei de 3 cm.

(5p) *a)* Arătați că înălțimea piramidei este de 1 cm.

(5p) *b)* Calculați volumul unei bomboane.

(5p) *c)* Fiecare bomboană este acoperită în totalitate cu staniol. Arătați că aria suprafeței minime de staniol necesar împachetării a 100 de bomboane este mai mare decât 960 cm^2 (se neglijează pierderile la suprapuneri).

2. Figura 2 reprezintă schița unei grădini dreptunghiulare $MNPQ$ și a aleilor din interiorul ei. Se știe că $MN = 100$ m, $NP = 60$ m, $RS = TU = VX = ZY = 4$ m, $MV = XN = PR = SQ$ și $QT = UM = YN = PZ$.

(5p) *a)* Segmentele RS, TU, VX și ZY reprezintă porți de acces în grădină. Se împrejmuiește grădina cu gard, nu și în dreptul porților. Calculați lungimea gardului exterior care înconjoară grădina.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței ocupate de alei.

(5p) *c)* În interiorul fiecărei parcele formate (suprafețe haşurate) se amenajează câte un strat cu flori, în formă de cerc. Calculați aria maximă a unui astfel de strat.

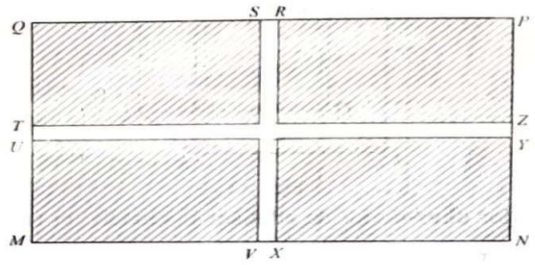


Figura 2

Testul 24 Evaluarea Națională 2011 (22 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $6 + 16 : 4$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Într-o urnă sunt 7 bile albe și 3 bile albastre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albastră este egală cu ... .

(5p) **3.** Trei kilograme de mere costă 7,5 lei. Patru kilograme de mere de aceeași calitate costă ... lei

(5p) **4.** Un dreptunghi are lungimea de 8 cm și lățimea egală cu $\frac{3}{4}$ din lungime. Lățimea dreptunghiului este de ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentată o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ care are toate fețele laterale pătrate. Măsura unghiului dintre dreptele AB' și CC' este egală cu ...°

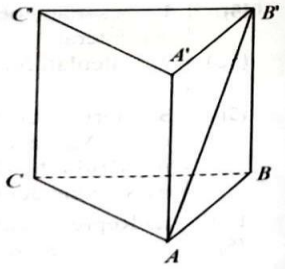


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei școli după notele obținute la un concurs.

Note	Mai mici decât 5	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	8	12	25	20	15	8	2

Numărul elevilor care au obținut o notă mai mică decât 7 este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf V și bază ABC.

(5p) **2.** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care are loc egalitatea $\frac{a-1}{2} = \frac{3}{b+1}$.

(5p) **3.** Prețul unui televizor s-a mărit cu 10%. După un timp, noul preț al televizorului s-a micșorat cu 10%. După aceste două modificări, televizorul costă 1980 lei. Determinați prețul inițial al televizorului.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului care are abscisa egală cu ordonata și aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)^2-3\sqrt{3}$ este natural.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Prisma patrulateră dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele pătrate (Figura 2) reprezintă schematic un suport pentru umbrele. Segmentul $[AP]$ reprezintă o umbrelă care se sprijină în punctul C'. Se știe că $AB = 30$ cm, $AC = CC'$ și $AP = 90$ cm.

(5p) *a)* Calculați înălțimea suportului.

(5p) *b)* Determinați măsura unghiului dintre dreapta AP și planul (ABC).

(5p) *c)* Determinați distanța de la punctul P la planul (ABC).

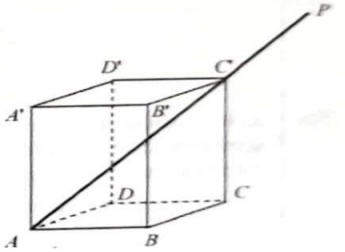


Figura 2

2. Figura 3 reprezintă schița unei grădini dreptunghiulare în care sunt plantate flori în trei zone, una în formă de cerc și două în formă de semicerc, care intersectează laturile $[AD]$ și $[BC]$ doar în punctele A, B, C, D, E și F. Zona circulară intersectează cele două zone semicirculare doar în punctele M și N. Se știe că $AB = 16$ m.

(5p) *a)* O albină așezată pe o floare situată în mijlocul diametrului $[AB]$ zboară în linie dreaptă, mai întâi până la o floare situată în punctul M, apoi mai departe, tot în linie dreaptă, până la o floare situată în punctul D. Calculați distanța parcursă de albină.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței din grădină plantată cu flori.

(5p) *c)* Arătați că aria suprafeței reprezentată de porțiunea haşurată este mai mică decât 111 m^2. $(3,14 < \pi < 3,15)$.

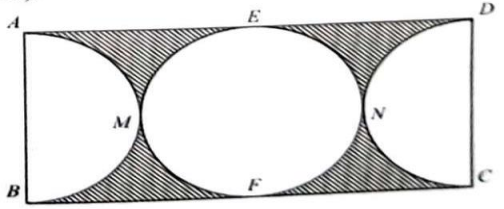


Figura 3

Testul 25 Evaluarea Naţională 2011, sesiunea specială (8 iunie)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Inversul numărului $\frac{5}{3}$ este egal cu ....

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 8 şi 12 este egală cu ...

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2x-4\geq 0$ este egală cu ...

(5p) **4.** Un pătrat cu perimetrul de 16 cm are latura de ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$ în care $AB = 5$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu ... cm.

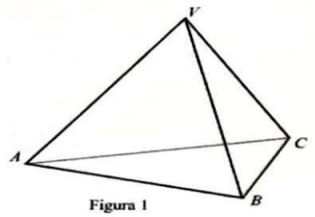
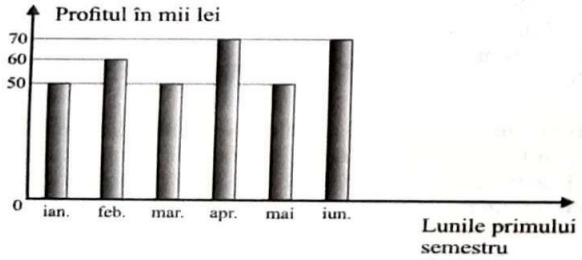


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate profiturile lunare ale unei firme în primul semestru al anului 2011. Profitul total realizat de firmă în această perioadă de timp este egal cu ... mii lei.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Enumeraţi elementele mulţimii $A=\left\{x\middle| x\in\mathbb{Z}-\{-1\},\ \frac{3x+2}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

(5p) **3.** Se consideră două numere reale pozitive distincte. Suma lor se înmulţeşte cu diferenţa lor. Produsul astfel obţinut este un număr pozitiv cu 4 mai mic decât pătratul numărului mai mare. Determinaţi cel mai mic dintre cele două numere.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) ***a)*** Reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) ***b)*** Calculaţi aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcţiei f şi de axele de coordonate Ox şi Oy.

(5p) **5.** Daţi un exemplu de 3 numere întregi a, b, c astfel încât să aibă loc egalitatea $x^3-3x^2-10x=(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)$, pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O cameră frigorifică în formă de paralelipiped dreptunghic este plină cu pachete cubice, fiecare având latura de 4 dm, fără să rămână goluri între ele. Podeaua camerei frigorifice este acoperită complet cu un strat de 7 pachete. Înălţimea camerei este de 5 ori mai mare decât înălţimea unui pachet.

(5p) ***a)*** Calculaţi aria suprafeţei podelei încăperii.

(5p) ***b)*** Arătaţi că aria laterală a camerei frigorifice este egală cu 1280 dm^2.

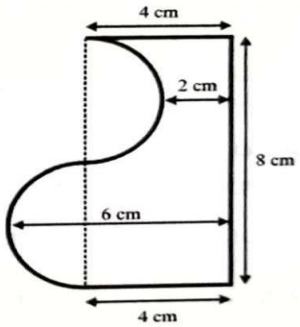
(5p) ***c)*** Determinaţi volumul camerei frigorifice, exprimat în litri.

2. Figura 2 reprezintă schiţa unei piese de carton, linia curbă reprezentând două semicercuri.

(5p) ***a)*** Calculaţi lungimea conturului piesei.

(5p) ***b)*** Determinaţi aria suprafeţei piesei.

(5p) ***c)*** Arătaţi că există un mod de aranjare, fără suprapunere, a mai multor piese de acest fel (avem la dispoziţie oricâte piese) astfel încât să acopere complet un pătrat cu lungimea laturii de 16 m.



Testul 26 Evaluarea Naţională 2011, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă $31-7+9-x=20$, atunci numărul x este egal cu ....

(5p) **2.** Un biciclist urcă o pantă în 20 de minute. La coborârea aceleiaşi pante, biciclistul îşi dublează viteza. Timpul în care biciclistul coboară panta este de ... minute.

(5p) **3.** După o reducere cu 15%, un penar costă 34 lei. Preţul iniţial al penarului a fost de ... lei.

(5p) **4.** Un dreptunghi cu lungimea de 9 cm şi lăţimea egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră cubul $ALGORITM$ din Figura 1. Măsura unghiului dintre dreptele AM şi LG este egală cu ... °.

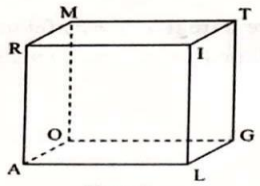
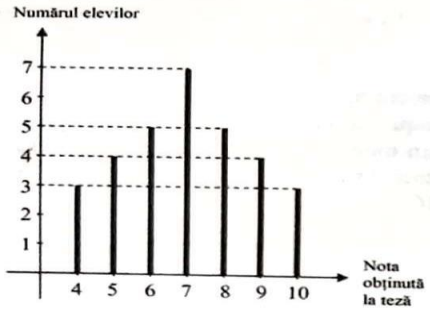


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de toți elevii unei clase la teza din semestrul al II-lea la matematică. Numărul elevilor din acea clasă este egal cu ...



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată care are baza $ABCD$ și vârful V.

(5p) **2.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|3x-2|\le 4\}$. Enumerați elementele mulțimii $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Din dublul unui număr necunoscut se scade $0,(3)$. Diferența obținută se împarte la $1,4(6)$ și se obține rezultatul $0,(45)$. Determinați numărul necunoscut.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+5$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-1)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $a=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2+(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})$ este număr întreg.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un vas în formă de cub cu lungimea muchiei de 1 m este plin cu apă. Se golește toată apa din vasul cubic într-un vas în formă de paralelipiped dreptunghic care are înălțimea de 10 dm, iar dimensiunile bazei de 25 dm și de 8 dm.

(5p) *a)* Calculați câți litri de apă sunt în vasul cubic.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a vasului paralelipipedic.

(5p) *c)* Calculați înălțimea la care se ridică apa în vasul paralelipipedic.

2. Figura 2 reprezintă schița unui rond de flori, circular, care se află în interiorul unei grădini dreptunghiulare și care este tangent laturilor (AB) și (CD) ale grădinii în punctele M, respectiv N. Se știe că: $AB=9$ m și $BC=6$ m.

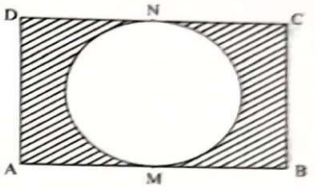


Figura 2

(5p) *a)* Calculați aria rondului.

(5p) *b)* Verificați dacă aria porțiunii haşurate este mai mică decât aria rondului circular. $(3,14<\pi<3,15)$.

(5p) *c)* Arătați că, oriunde am planta doi copaci în zona haşurată a grădinii, distanța dintre aceştia este mai mică decât 11 m.

Testul 27 Evaluarea Națională 2010 (12 mai)

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2+4:2$ este egal cu ....

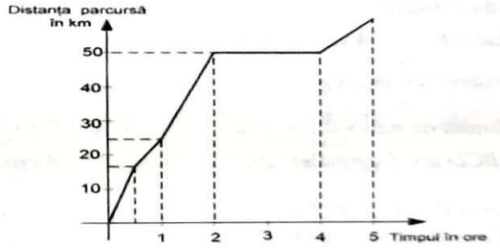
(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 2 și 8 este egală cu ...

(5p) **3.** Dacă $A=\{1;2;3\}$ și $B=\{3;4\}$, atunci mulțimea $A\cap B$ este egală cu $\{...\}$.

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are latura de 4 m. Aria triunghiului este egală cu ... m^2.

(5p) **5.** O prismă dreaptă are ca baze triunghiurile echilaterale ABC, respectiv $A'B'C'$. Măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$ este egală cu ... °.

(5p) **6.** Figura de mai jos reprezintă graficul deplasării unui vehicul pe parcursul a 5 ore. În această perioadă, vehiculul staționează timp de ... ore.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC.

(5p) **2.** Un elev cumpără 10 cărți, de literatură și de matematică. El plătește 9 lei pentru o carte de literatură și 7 lei pentru o carte de matematică, cheltuind astfel 76 lei. Câte cărți de matematică a cumpărat elevul?

3. O persoană are o sumă S de bani. În prima zi cheltuiește 30% din suma S, a doua zi cheltuiește 40% din suma S, iar a treia zi cheltuiește $\frac{1}{4}$ din suma S.

(5p) *a)* În ce zi cheltuiește cel mai puțin persoana respectivă?

(5p) *b)* Persoanei îi rămân 100 de lei după cele 3 zile. Determinați valoarea sumei S.

(5p) **4.** Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

(5p) **5.** Arătați că numărul $p=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)$ este natural.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura 1 reprezintă schița unui bazin în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Baza $ABCD$ are $AB = 12$ m și $BC = 4$ m, iar înălțimea paralelipipedului este $AA' = 3$ m.

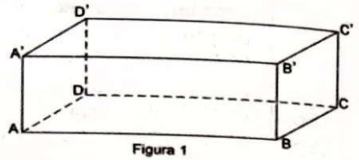


Figura 1

(5p) ***a)*** Calculați distanța dintre punctele A și C'.

(5p) ***b)*** Calculați aria laterală a bazinului.

(5p) ***c)*** În bazin se află 96000 litri de apă. Calculați înălțimea la care se ridică apa în bazin.

2. Figura 2 reprezintă schița unui patinoar format dintr-un dreptunghi $MNPQ$ care are lungimea MN de 40 m și lățimea de 30 m și din două semicercuri de diametre $[MQ]$, respectiv $[NP]$.

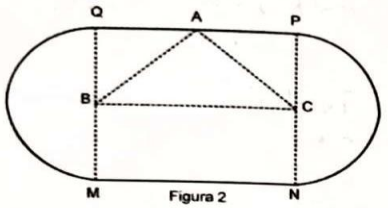


Figura 2

(5p) ***a)*** Patinoarul este înconjurat de un gard. Calculați lungimea gardului care înconjoară patinoarul.

(5p) ***b)*** Verificați dacă aria patinoarului este mai mică decât 2000 m^2. $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$.

(5p) ***c)*** Un patinator parcurge distanțele AB, BC și CA. Punctele B și C sunt mijloacele segmentelor $[MQ]$, respectiv $[NP]$ și A este mijlocul segmentului $[PQ]$. Calculați valoarea sinusului unghiului ABC.

Testul 28 Evaluarea Națională 2010, sesiunea specială

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $624 : 3$ este egal cu ...

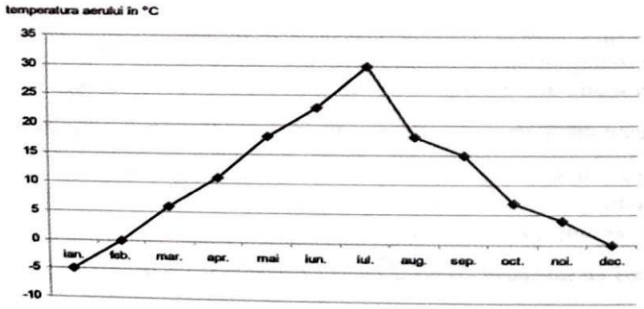
(5p) **2.** Inversul numărului $\frac{2}{3}$ este egal cu ...

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3\}$ este egală cu ...

(5p) **4.** Un romb $ABCD$ are diagonalele $AC = 5$ cm și $BD = 4$ cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$. Dacă $AB = AA' = 4$ m, suma lungimilor tuturor muchiilor prismei este egală cu ... m.

(5p) **6.** În graficul de mai jos, diferența dintre temperatura cea mai mare și cea mai mică este egală cu ... °C.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC.

(5p) **2.** Media aritmetică a două numere naturale este 17,5 și unul dintre numere este 7. Determinați al doilea număr.

3. Prețul unui telefon mobil a scăzut cu 10% și, după o săptămână, noul preț a scăzut cu încă 10%. După cele două modificări de preț, telefonul costă 81 de lei.

(5p) ***a)*** Arătați că prețul inițial al telefonului a fost de 100 de lei.

(5p) ***b)*** Cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul produsului după cele două ieftiniri?

(5p) **4.** Determinați valoarea numărului real a știind că punctul $A(2; a)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-a) \cdot x + 2$.

(5p) **5.** Simplificați raportul $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 10x + 25}$ cu $x - 5$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura 1 reprezintă schița unui cort în formă de prismă dreaptă care are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și DEF. Se știe că $BC = 2$m și $CF = 3$m.

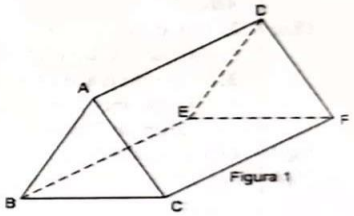


Figura 1

(5p) ***a)*** Calculați distanța de la punctul A la planul BCE).

(5p) ***b)*** Calculați volumul cortului.

(5p) ***c)*** Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 22 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua).

2. Figura 2 reprezintă schița unui teren a cărui arie este de 8 hectare.

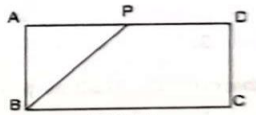


Figura 2

(5p) ***a)*** Exprimați aria terenului în m^2.

Pe acest teren, se sapă un șanț $[BP]$ pentru canalizare $(P \in AD)$. Unghiurile ABP și PBC sunt congruente. Valoarea raportului dintre aria triunghiului ABP și aria dreptunghiului $ABCD$ este 0,25.

(5p) ***b)*** Arătați că $BC = 2AB$.

(5p) ***c)*** Calculați lungimea, exprimată în metri, a șanțului $[BP]$ și aproximați rezultatul cu cel mai apropiat număr natural.

Testul 29 Evaluarea Națională 2010, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $64 : 8 + 8$ este egal cu ....

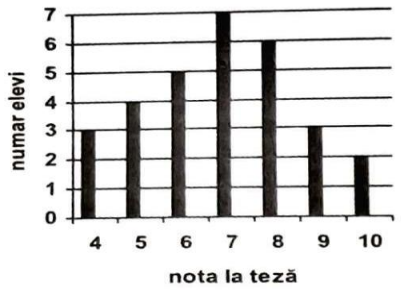
(5p) **2.** Fie mulțimile $A = \{-2, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 4\}$. Mulțimea $A \cap B = \{...\}$.

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 11 bile negre și 18 bile albe. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră este egală cu ...

(5p) **4.** Diametrul unui cerc este de 4 m. Lungimea razei cercului este egală cu ... m.

(5p) **5.** Aria totală a unui cub este egală cu 150 dm^2. Muchia acestui cub este de ... dm.

(5p) **6.** Toți elevii unei clase au susținut teza la matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform graficului, clasa are un număr de ... elevi.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf S și de bază $ABCD$.

(5p) **2.** Într-o bibliotecă, pe un raft se află 24 de cărți, iar pe alt raft se află de două ori mai multe cărți. Câte cărți se află, în total, pe cele două rafturi?

3. Într-o pungă sunt bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 4 copii, atunci rămân în pungă 3 bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 7 copii, atunci rămân în pungă 6 bomboane.

(5p) ***a)*** Verificați dacă în pungă pot fi 55 de bomboane.

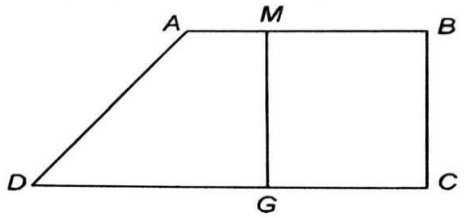
(5p) ***b)*** Care poate fi cel mai mic număr de bomboane din pungă, înainte ca acestea să fie împărțite copiilor?

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Verificați dacă punctele $P(0;\ 5)$ și $Q(5;\ 0)$ aparțin graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $(x+2)^3-x-2=(x+1)(x+2)(x+3)$, pentru orice x număr real.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În figura de mai jos sunt ilustrate schematic pardoseala unui salon $AMGD$ și pardoseala unei camere de zi $MBCG$.
$AB = 6$ m, $BC = 5$ m, $CD = 10$ m, M este un punct situat pe segmentul (AB),
$AM = x$; (x este o distanță exprimată în metri; $0 < x < 6$).



(5p) ***a)*** Exprimați, în funcție de x, aria pardoselii camerei de zi $MBCG$.

(5p) ***b)*** Arătați că aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu $5(x+2)$ m^2.

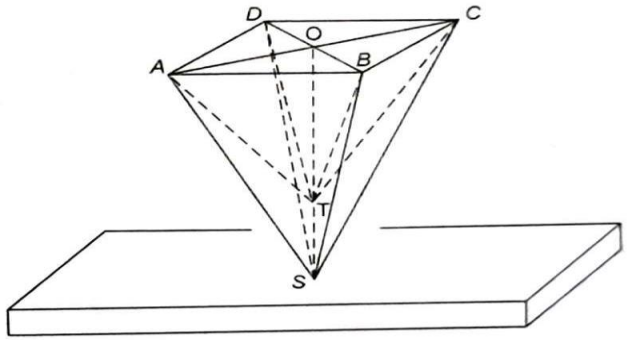
(5p) ***c)*** Pentru ce valoare reală a lui x aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu aria pardoselii camerei de zi $MBCG$.

(5p) ***d)*** Se consideră $AM = 2$ m. O persoană cumpără gresie pentru salonul $AMGD$. Un metru pătrat de gresie costă 80 de lei. Pentru fiecare metru pătrat de gresie se acordă o reducere de 5 % oricărei persoane care cumpără mai mult de 10 m^2. Toată gresia cumpărată pentru salon are suprafața mai mare cu un metru pătrat decât suprafața salonului. Cât a costat în total gresia pentru salonul $AMGD$?

2. Figura de mai jos reprezintă schematic o fântână săpată în piatră. $SABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, de înălțime $SO = 9$ dm, în care este săpată o piramidă patrulateră regulată $TABCD$ corespunzătoare unui bazin plin cu apă. $ST = 3$ dm, iar baza $ABCD$ este un pătrat de latură $AB = 6$ dm.

(5p) ***a)*** Calculați aria totală a piramidei $SABCD$, în care este săpată fântâna.

(5p) ***b)*** Verificați dacă în bazinul $TABCD$ pot intra 70 de litri de apă.



3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului 216:2 este egal cu ... .

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 6 şi 14 este egală cu ... .

(5p) **3.** Patru kg de mere costă 9,6 lei. Cinci kg de mere de aceeaşi calitate costă ... lei.

(5p) **4.** Un triunghi echilateral şi un pătrat au fiecare perimetrul de 24 cm. Raportul dintre latura triunghiului echilateral şi latura pătratului este egal cu ... .

(5p) **5.** Aria totală a unei piramide patrulatere regulate cu înălţimea de 3 cm şi latura bazei de 8 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este reprezentată repartiţia sumelor alocate de o gospodină cumpărăturilor zilnice. Suma cheltuită în medie pe zi este egală cu ... lei.

Ziua	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Suma	24 lei	36 lei	20 lei	40 lei	17,5 lei	16,5 lei	14 lei

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $CANOE$ de vârf C şi de bază $ANOE$.

(5p) **2.** Fie mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x-3|\le 4\}$. Enumeraţi elementele mulţimii $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Mai multe persoane vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare persoană ar contribui cu câte 30 lei, nu ajung 40 lei, iar dacă fiecare ar contribui cu câte 35 lei, rămân 20 lei. Determinaţi numărul persoanelor şi preţul obiectului.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+2$, $m\in\mathbb{R}$.

(5p) ***a)*** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(-1;1)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

(5p) ***b)*** Pentru $m=1$, reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) **5.** Arătaţi că numărul $a=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}\right)$ este întreg.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O piscină în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 50 m, lăţimea de 30 m şi adâncimea de 3 m.

(5p) ***a)*** Calculaţi volumul bazinului.

(5p) ***b)*** Dacă piscina se umple cu apă până la înălţimea de 2 m, atunci calculaţi câţi litri de apă intră în piscină.

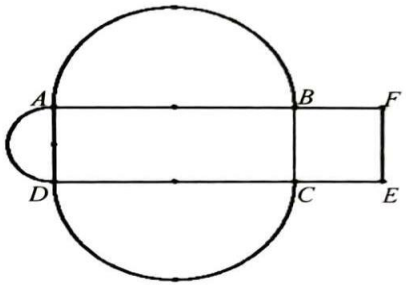
(5p) ***c)*** Dacă piscina se umple prin 10 robinete prin care curg 200 l apă pe minut din fiecare, atunci determinaţi în cât timp (ore şi minute) se umple piscina.

2. Un parc de distracţii are forma din figura următoare. Se ştie că $AB=60$ m şi $BC=40$ m, $BCEF$ este pătrat, iar $ABCD$ dreptunghi. Pe laturile $[AB]$, $[AD]$, $[CD]$ sunt construite în exterior semicercuri, ce fac parte din parcul de distracţii.

(5p) ***a)*** Arătaţi că lungimea gardului care împrejmuieşte parcul este mai mică decât 372 m. $(3{,}14<\pi<3{,}15)$.

(5p) ***b)*** Fie S aria suprafeţei parcului. Arătaţi că $\frac{S-4000}{11\pi}$ este pătrat perfect.

(5p) ***c)*** Dacă $AE\cap CF=\{P\}$, atunci determinaţi lungimea segmentului $[PE]$.



Testul 2

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ este egal cu ... .

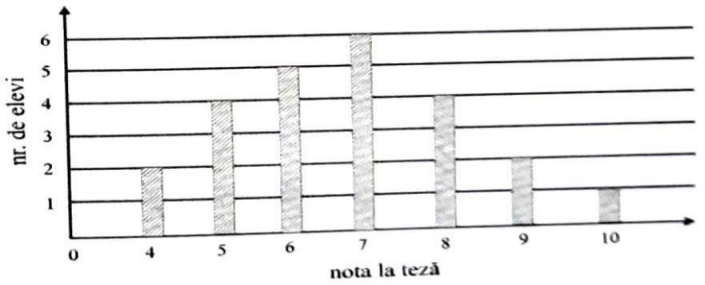
(5p) **2.** După o reducere de 10%, preţul unui obiect a devenit 54 lei. Preţul iniţial era ... lei.

(5p) **3.** Numărul 2,3(6) transformat în fracţie ordinară ireductibilă este egal cu ... .

(5p) **4.** Un dreptunghi are lungimea 12 cm şi lăţimea egală cu trei sferturi din lungime. Lăţimea dreptunghiului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Volumul unui cub este egal cu 27 cm^3. Muchia cubului este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Rezultatele obţinute de elevii unei clase la teza la matematică sunt reprezentate în graficul alăturat. Conform graficului, ... elevi au obţinut cel puţin nota 7 la teză.



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Rezolvați ecuația $\frac{2x-1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x+3}{6}$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) **3.** După ce a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, un turist constată că dacă mai parcurge 2 km ajunge la jumătatea drumului. Determinați lungimea drumului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$.

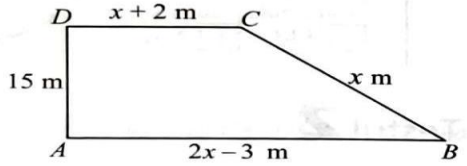
(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care $A(m;-1)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=\left(6\sqrt{3}+15\sqrt{2}\right)\cdot\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{50}}+10$ este pătrat perfect.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Grădina unei case are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, ca în figura alăturată.



(5p) *a)* Arătați că $x=25$ m.

(5p) *b)* Fie E și F sunt mijloacele laturilor BC și AD. Calculați perimetrul figurii $ABEF$.

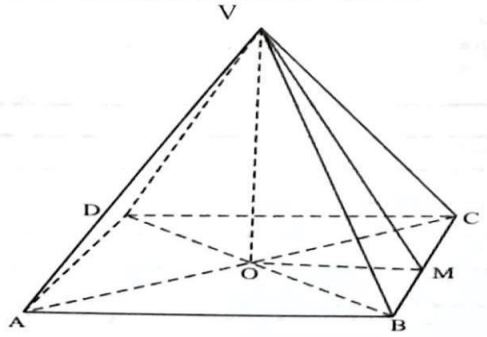
(5p) *c)* Determinați aria suprafeței grădinii.

2. La un laborator de cofetărie se primește o ciocolată menaj având forma unei piramide patrulatere regulată, ca în figura de mai jos, cu latura bazei de 3 dm și înălțimea de 2 dm.

(5p) *a)* Determinați volumul piramidei patrulatere regulate.

(5p) *b)* Ciocolata este topită și din aceasta se realizează bomboane de forma unui cub cu muchia de 2 cm. Determinați numărul bomboanelor realizate.

(5p) *c)* Calculați aria laterală a piramidei patrulatere regulate.



Testul 3

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}$ este egal cu ... .

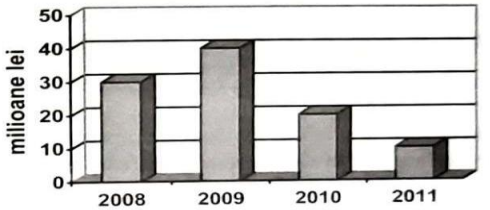
(5p) **2.** Dacă numărul $\overline{37x}$ este divizibil cu 2, atunci $x\in\{\ldots\}$.

(5p) **3.** Opusul numărului -3 este egal cu ... .

(5p) **4.** Aria laterală a unui cilindru circular drept cu raza de 5 m și înălțimea de 10 m, este egală cu ... m^2.

(5p) **5.** Complementul unghiului cu măsura de 42° este egal cu ... °.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată evoluția profitului unei societăți comerciale în perioada 2008-2011. Valoarea medie a profitului în această perioadă este egală cu ... milioane lei.



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $MNPQM'N'P'Q'$.

(5p) **2.** O persoană a depus la bancă suma de 50000 lei. Dobânda băncii este de 6,5% pe an. Calculați ce sumă va avea la bancă acea persoană după un an.

(5p) **3.** Determinați x și y numere reale, știind că $x^2+4y^2-6x+4y+10\le 0$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+3$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Arătați că numărul $z=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot f(1)\cdot f(-3)}$ este natural.

(5p) **5.** Arătați că $E(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}+\frac{x+2}{x+1}-\frac{x^2+5x+2}{x^2-1}=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un teren de hochei are forma din figura alăturată. Lungimea dreptunghiului este de 50 m, iar lungimea unui semicerc este de 20π m.

(8p) *a)* Calculați aria dreptunghiului.

(7p) *b)* Dacă S este aria terenului, atunci arătați că $\frac{S}{5+\pi}$ este pătrat perfect.



2. Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 20 dm și 12 dm, iar înălțimea de 10 dm este plin cu apă. Se golește toată apa într-un vas ce are formă de cub cu lungimea muchiei de 2 m.

(5p) *a)* Determinați volumul paralelipipedului dreptunghic, exprimat în litri.

(5p) *b)* Calculați aria totală a paralelipipedului dreptunghic.

(5p) *c)* Calculați înălțimea la care se ridică apa în vasul ce are formă de cub.

Testul 4

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2+18:3$ este egal cu ... .

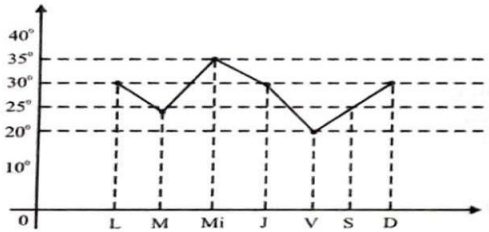
(5p) **2.** Dintre numerele $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{3}$ este mai mare ... .

(5p) **3.** Trei ore au ... minute.

(5p) **4.** Volumul unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm este egal cu ... cm^3.

(5p) **5.** Suma tuturor muchiilor unui tetraedru regulat cu aria totală de $25\sqrt{3}$ cm^2 este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Figura alăturată reprezintă graficul evoluției temperaturilor maxime într-o săptămână de vară. Temperatura a scăzut de miercuri până sâmbătă cu ... ° C.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCDEFGH$ cu baza mare $ABCD$.

(5p) **2.** În biblioteca școlii, pe un raft sunt x cărți, pe un alt raft se află un sfert din numărul cărților aflate pe primul raft, iar pe al treilea raft o treime din numărul cărților aflate pe primele două rafturi. Determinați numărul cărților de pe fiecare raft, știind că pe cele 3 rafturi sunt 80 de cărți.

(5p) **3.** Rezolvați inecuația $(x-3)^2-(x-5)(x+5)\le 4x+14, x\in\mathbb{R}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției f și axele de coordonate.

(5p) **5.** Dacă $a=(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})-2\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, arătați că $a\in\mathbb{N}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un rezervor de apă are formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 5 m, lățimea de 4 m și înălțimea de 2 m. Suprafața laterală se vopsește, fiind necesari 2 litri de vopsea pentru fiecare metru pătrat, iar vopseaua este în cutii de 2 litri.

(5p) *a)* Câte cutii sunt necesare pentru vopsire?

(5p) *b)* Calculați cât costă vopseaua necesară, știind că 1 litru de vopsea costă 15 lei, iar dacă se cumpără mai mult de 10 litri se aplică o reducere de 10% la toată cantitatea cumpărată.

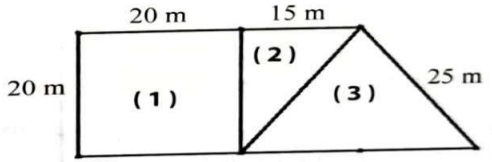
(5p) *c)* Pentru cât timp ar ajunge apa din acest rezervor dacă zilnic s-ar folosi pentru irigarea unui gazon 250 litri de apă? (Rezervorul este plin.)

2. În figura de mai jos este ilustrată schematic o grădină cu flori, împărțită în trei parcele cultivate cu crizanteme (1), cu zambile (2) și cu narcise (3).

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței cultivată cu narcise.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței grădinii.

(5p) *c)* Dacă pe un m^2 sunt 25 de fire de narcisă și un fir se vinde cu 1,5 lei, atunci calculați suma încasată în urma vânzării tuturor narciselor de pe parcela (3).



Testul 5

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Media aritmetică a numerelor 10 și 12 este egală cu ... .

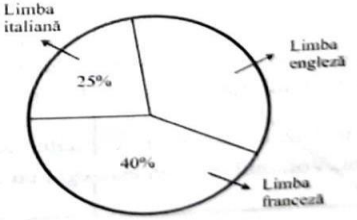
(5p) **2.** Descompunerea în factori primi a numărului 54 este egală cu ... .

(5p) **3.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $[-3;1)$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Dacă $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$, atunci valoarea numărului real x este egală cu ... .

(5p) **5.** O piramidă patrulateră regulată are muchia bazei egală cu 12 cm și înălțimea egală cu 8 cm. Apotema piramidei este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Într-o școală sunt 1000 elevi care studiază limbi străine. În diagrama următoare este reprezentată repartiția elevilor școlii după prima limbă străină studiată. Numărul elevilor care studiază ca primă limbă, limba engleză, este egal cu ... .



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $MNPM'N'P'$ cu bazele triunghiuri echilaterale.

(5p) **2.** La o piesă de teatru s-au vândut bilete la prețul de 6 lei, respectiv 10 lei biletul. S-au vândut 240 bilete și s-au încasat 2000 lei. Determinați numărul biletelor de 6 lei vândute.

(5p) **3.** Arătați că numărul $a=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ este natural.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.

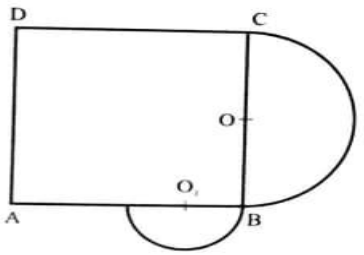
a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m,-1)$ se află pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $(x-5)^3-x+5=(x-4)(x-5)(x-6)$, pentru orice număr real x.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura alăturată este reprezentată schița unui șstrand. În zona OCD sunt puse șezlonguri, în zona $ABOD$ este nisip, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 20 m, semicercul mare este piscina pentru adulți, iar semicercul mic este piscina pentru copii.



(5p) ***a)*** Știind că un șezlong ocupă 2 m^2, calculați câte șezlonguri se pot așeza în zona OCD.

(5p) ***b)*** Știind că lungimea semicercului mic este 5π, calculați aria suprafeței ocupată de cele două piscine.

(5p) ***c)*** Calculați câți bani se încasează din închirierea șezlongurilor, dacă se închiriază în medie 80% din numărul acestora și că închirierea unui șezlong costă 20 lei.

2. Un bazin are formă de prismă dreaptă cu bazele pătrate cu muchia bazei de 2 m și înălțimea de 1 m.

(5p) ***a)*** De câte găleți de 10 litri de apă este nevoie pentru a umple bazinul?

(5p) ***b)*** În cât timp se golește bazinul plin printr-o vană cu debitul de 40 litri pe minut?

(5p) ***c)*** Care este înălțimea apei din bazin, când acesta este umplut până la 80% din capacitate?

Testul 6

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rădăcina pătrată a numărului 81 este egală cu ... .

(5p) **2.** Dintre numerele $a=\sqrt{17}$ și $b=3\sqrt{2}$ este mai mare numărul ... .

(5p) **3.** Soluția naturală a ecuației $x+2=3$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 84 cm. Muchia cubului are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** O prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale are muchia bazei egală cu 4 cm și înălțimea $2\sqrt{6}$ cm. Volumul prismei este egal cu ... cm^3.

(5p) **6.** Diagrama următoare reprezintă numărul de cărți împrumutate de o bibliotecă școlară în ultimii 4 ani. Numărul mediu de cărți împrumutate în primii trei ani este egal cu ... .

Anul	2008	2009	2010	2011
Număr de volume	200	250	450	300

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cilindru circular drept.

(5p) **2.** Un biciclist parcurge un drum în trei zile, astfel: în prima zi o treime din lungimea drumului, a doua zi două cincimi din rest, iar în a treia zi, ultimii 24 km. Determinați lungimea drumului și aflați câți kilometri a parcurs bicicliștul în fiecare dintre zile.

(5p) **3.** Calculați ce salariu are în prezent un angajat, știind că inițial avea 1500 lei, după care salariul s-a redus cu 25%, iar după un timp noul salariu s-a mărit cu 8%.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f.

(5p) ***b)*** Determinați coordonatele punctului de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu ordonata.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{15}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$ este natural.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Se cunosc $AB=16$ m, $BC=4$ m și $AA'=3$ m.

(5p) ***a)*** Calculați distanța dintre punctele A și C'.

(5p) ***b)*** Calculați aria totală a bazinului.

(5p) ***c)*** În bazin se află 128000 litri de apă. Calculați înălțimea la care se ridică apa în bazin.

2. Figura următoare reprezintă schița unui teren a cărui suprafață este de 5 ari. Se cunosc $AB=35$ m, $AD=20$ m, $N\in(DC)$, $NC=x$ (x este o distanță exprimată în metri). Suprafața $AMND$ este cultivată cu cartofi, iar suprafața $MBCN$ este cultivată cu sfeclă.

(5p) ***a)*** Calculați lungimea laturii DC.

(5p) ***b)*** Exprimați în funcție de x aria suprafeței cultivate cu cartofi și determinați pentru ce valoare a lui x aria lui $AMND$ este egală cu aria lui $MBCN$.

(5p) ***c)*** Știind că $x=2{,}5$ m și de pe un ar de teren se recoltează 30 kg de sfeclă, atunci determinați câte kg de sfeclă s-au recoltat de pe suprafața $MBCN$.

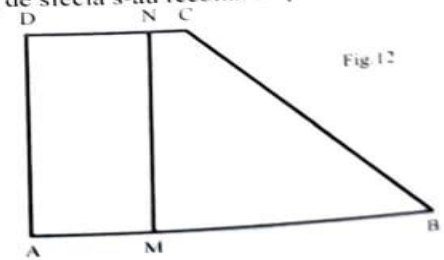


Fig 12

Testul 7

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural impar de trei cifre distincte este egal cu … .

(5p) **2.** Un divizor al numărului 24 este egal cu … .

(5p) **3.** Dacă $21-8+7-x=31$, atunci numărul x este egal cu … .

(5p) **4.** După o reducere de 15%, un ghiozdan costă 85 lei. Prețul inițial al ghiozdanului a fost de … lei.

(5p) **5.** Un dreptunghi cu lungimea de 12 cm și lățimea un sfert din lungime are perimetrul egal cu … cm.

(5p) **6.** Temperaturile medii înregistrate în prima săptămână a lunii ianuarie sunt reprezentate în tabelul următor:

Data	1 ian.	2 ian.	3 ian.	4 ian.	5 ian.	6 ian.	7 ian.
Temp. °C	-7°C	-4°C	-1°C	0°C	-3°C	-4,5°C	-2°C

Cea mai friguroasă zi din săptămână a fost … .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ de vârf V și bază $ABCDEF$.

(5p) **2.** Un apicultor are 400 kg miere pe care le pune în borcane de câte 800 g fiecare. Determinați numărul borcanelor de care are nevoie pentru a pune întreaga cantitate de miere.

3. Pentru o carte și un caiet, Andrei plătește 60 lei. După o săptămână cartea se ieftinește cu 10%, iar prețul caietului crește cu 10%, astfel că pentru amândouă se va plăti 56 lei.

(5p) ***a)*** Determinați prețul inițial al cărții.

(5p) ***b)*** Calculați prețul cărții și al caietului după modificările de prețuri.

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.

(5p) **5.** Se dă $E(x)=(x+1)^2+(x-1)^2-(x-2)(x+2)$. Calculați $E(1)+E\left(\sqrt{2}\right)$.

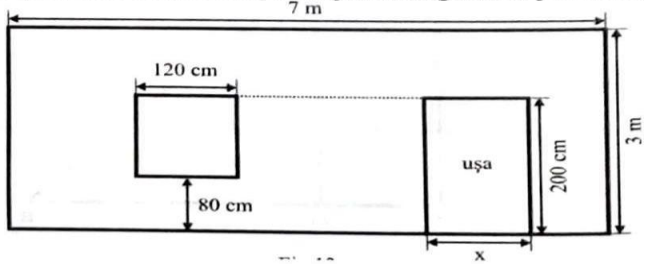
Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura alăturată este ilustrat schematic un perete din camera lui Paul pe care acesta vrea să-l zugrăvească ținând cont de dimensiunile de pe desen. Fereastra și ușa sunt dreptunghiuri.

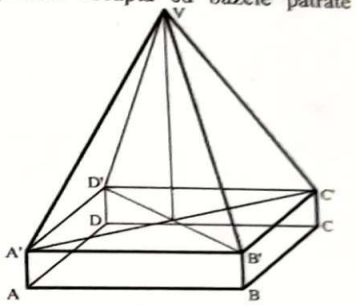
(5p) ***a)*** Exprimați în funcție de x aria porțiunii pe care Paul vrea să o zugrăvească.

(5p) ***b)*** Determinați valoarea lui x, știind că aria suprafeței ușii este de 1,8 m^2.

(5p) ***c)*** Fie $x=0,9$ m. Dacă 1 litru de vopsea lavabilă acoperă 5 m^2, atunci determinați cantitatea de vopsea care trebuie cumpărată pentru zugrăvirea peretelui.



2. Figura alăturată reprezintă o prăjitură, unde prisma dreaptă cu bazele pătrate $ABCDA'B'C'D'$ reprezintă blatul prăjiturii, iar piramida patrulateră regulată $VA'B'C'D'$ este din ciocolată. Se știe că $AA'=5$ cm, $AB=BC=8$ cm și înălțimea prăjiturii este de 11 cm.



(5p) ***a)*** Calculați volumul prăjiturii.

(5p) ***b)*** Calculați aria laterală a porțiunii din ciocolată.

(5p) ***c)*** Știind că o prăjitură cântărește 200 g, iar 1 kg de prăjitură din același sortiment costă 30 lei, calculați prețul unei prăjituri.

Testul 8

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-9:3+2^2$ este egal cu … .

(5p) **2.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea soluțiilor inecuației $3x-6\geq 0$ este egală cu ….

(5p) **3.** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 15. Probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu număr prim este egală cu … .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral cu perimetrul de 24 cm are latura egală cu … cm.

(5p) **5.** O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 2 cm și înălțimea de 1 cm , are diagonala egală cu … cm.

(5p) **6.** Notele obținute la teză la matematică de către elevii unei clase sunt redate în tabelul următor:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	6	8	4	3	2

Media clasei la teză este egală cu … .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un con circular drept cu secțiunea axială triunghi dreptunghic.

(5p) **2.** Numerele raționale pozitive a, b și c sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Știind că $6a^2+b^2-2c^2=9$, determinați numerele a, b, c.

3. Răspunzând la toate cele 30 întrebări ale unui test, un elev a obținut 102 puncte. Pentru un răspuns corect s-au acordat 5 puncte, iar pentru unul greșit s-au scăzut 3 puncte.

(5p) ***a)*** Câte răspunsuri corecte a dat elevul?

(5p) ***b)*** Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care ar trebui să le dea elevul pentru a depăși 130 puncte?

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

a) Determinați numărul real m pentru care punctul $A(2m, m^2+3)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

b) Reprezentați grafic funcția f.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=3+3^2+3^3+3^4+\ldots+3^{2013}$ este divizibil cu 13.

Subiectul III **(30 de puncte)**

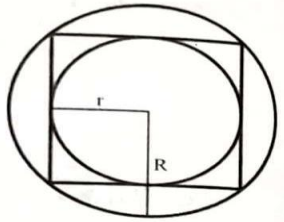
1. Un vas are forma unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu înălțimea de 12 cm și $V = 432$ cm^3.

(5p) *a)* Calculați latura bazei prismei.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a vasului.

(5p) *c)* Dacă vasul este plin cu apă și se golește 25% din capacitatea sa, calculați la ce înălțime se ridică nivelul apei rămase.

2. Decorul unei plăci de ceramică este reprezentat în figura alăturată. Pătratul este înscris în cercul de rază R, circumscris cercului de rază r și are latura de 6 cm.



(5p) *a)* Aflați raportul numerelor r și R.

(5p) *b)* Aflați raportul dintre perimetrul pătratului și lungimea cercului de rază r.

(5p) *c)* Determinați aria porțiunii cuprinse între pătrat și cercul de rază r.

Testul 9

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $714 : 7 - 3$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$. Scrisă sub formă de interval, mulțimea A este egală cu ... .

(5p) **3.** 15% din 300 m reprezintă ... m.

(5p) **4.** Dintre numerele $-4,3$ și $-4,33$ mai mare este numărul ... .

(5p) **5.** Diagonala unui cub cu muchia de 5 cm este egală cu ... cm.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată situația notelor obținute de elevii unei școli la un test de matematică.

Note	1-4,99	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	3	12	20	26	24	22	2

Numărul elevilor care au susținut testul de matematică este egal cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de con circular drept cu secțiunea axială $ABCD$.

(5p) **2.** Suma a trei numere este egală cu 111. Unul dintre numere este egal cu media aritmetică a celorlalte două numere. Determinați suma celor două numere.

(5p) **3.** Un grup de copii a primit un număr de mere. Unul dintre copii a primit 3 mere, iar ceilalți copii au primit fiecare câte 5 mere. Dacă fiecare copil ar fi primit câte 4 mere, ar fi rămas 11 mere.

(5p) *a)* Determinați numărul copiilor din grup.

(5p) *b)* Calculați numărul merelor primite de grupul de copii.

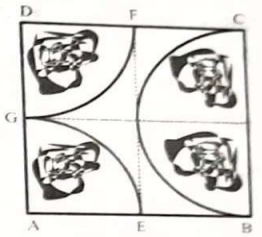
(5p) **4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

Arătați că numărul $A = 2012 + 2 \cdot [f(0) + f(1) + ... + f(2010)]$ este pătrat perfect.

(5p) **5.** Dintr-un număr scădem 35. Rezultatul obținut se înmulțește cu 2 și se obține 28. Determinați numărul.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Decorul unei plăci de gresie sub formă de pătrat este cel din figura alăturată. Punctele E, F, G sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$ și $[AD]$. Pe un hol lung de 3 m se pun 70 plăci de gresie de forma celei din figură. Se știe că o placă de gresie are latura de 30 cm.

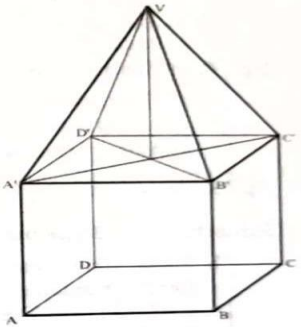


(5p) *a)* Determinați lățimea holului.

(5p) *b)* Aflați aria porțiunii fără model.

(5p) *c)* Calculați suma lungimilor tuturor arcelor de pe o placă de gresie.

2. În figura alăturată este reprezentată schița unui cort. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu muchia de 4 m, iar $VA'B'C'D'$ este o piramidă patrulateră regulată. Înălțimea cortului este de 6 m.



(5p) *a)* Calculați distanța dintre punctele V și A.

(5p) *b)* Aflați câți m^2 de pânză au fost necesari pentru confecționarea cortului (fără podeaua $ABCD$).

(5p) *c)* Determinați volumul cortului.

Testul 10

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $6 : 6 \cdot 6 - 6$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\overline{1x7}$ este divizibil cu 9, atunci x este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $x = 2$, atunci $-x + 1$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Un cerc are diametrul egal cu 18 cm. Lungimea cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Un con circular drept are raza de 8 cm și înălțimea de 6 cm. Volumul conului este egal cu ... cm^3.

(5p) **6.** Graficul următor reprezintă numărul de kilometri parcurși de un grup de turiști, pe parcursul a 7 zile. Conform graficului, ziua în care s-au parcurs cei mai puțini km este cea cu numărul ... .

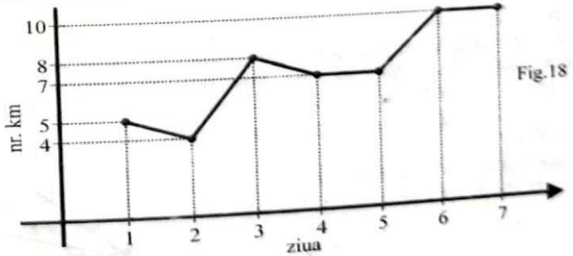


Fig.18

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ de vârf V și bază $ABCD$.

2. Un kg de mere costă 3 lei, iar un kg de piersici costă 4,5 lei.

(5p) ***a)*** Andrei cumpără 2 kg mere și 3 kg piersici. Ce rest primește dacă el plătește cu 2 bancnote de 10 lei?

(5p) ***b)*** Paul are 24 lei și vrea să cumpere 6 kg fructe (mere și piersici). Câte kilograme de mere și câte kilograme de piersici trebuie să cumpere astfel încât să plătească exact 24 lei?

(5p) **3.** Mama și fiul au împreună 40 ani. Mama este de trei ori mai în vârstă decât fiul.

a) Determinați vârsta mamei și vârsta fiului.

b) Peste câți ani vârsta fiului va fi egală cu jumătate din vârsta mamei?

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

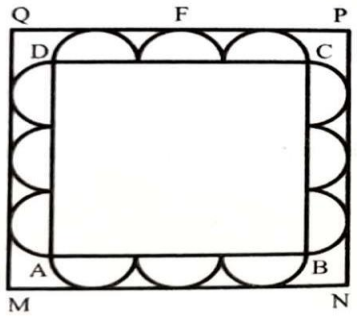
a) Determinați funcția f știind că $f(2012)=2011$ și punctul $A(0;-1)$ aparține graficului funcției f.

b) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$, reprezentați grafic funcția f.

(5p) **5.** Demonstrați că $x^2+10x+4y^2-20y+50\geq 0$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Maria confecționează o față de masă sub forma pătratului $MNPQ$, ca în figura următoare. $ABCD$ este un pătrat din pânză, iar în exteriorul acestuia este dantelă pe care s-au aplicat semicercuri din șnur roșu. Pe fiecare latură a pătratului $ABCD$ (din pânză) s-au aplicat trei semicercuri cu raza de 15 cm.

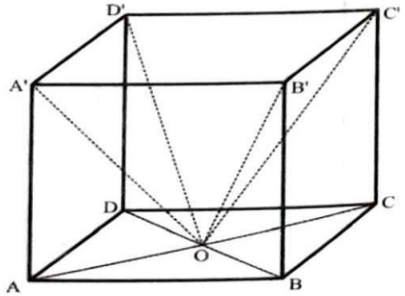


(5p) ***a)*** Determinați lungimea laturii feței de masă.

(5p) ***b)*** Calculați câți metri de șnur s-au folosit. (Se ia în calcul $\pi=3,14$ și rotunjiți rezultatul la zecime).

(5p) ***c)*** Știind că un metru pătrat de pânză costă 10 lei, un metru pătrat de dantelă costă 18 lei și un metru liniar de șnur costă 4 lei, calculați cât au costat materialele pentru confecționarea feței de masă. (Se cumpără număr întreg de metri de șnur).

2. Figura alăturată reprezintă o vază obținută dintr-o prismă dreaptă cu bazele pătrate $ABCDA'B'C'D'$ din care s-a scos piramida patrulateră regulată $OA'B'C'D'$. Se știe că $AB=2$ dm și $AA'=3$ dm.



(5p) ***a)*** Calculați aria totală a prismei $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) ***b)*** Calculați distanța de la A' la BD.

(5p) ***c)*** Verificați dacă în vază încap 3,8 litri de apă.

Testul 11

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului 3^2+3^3 este egal cu ... .

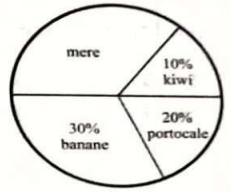
(5p) **2.** A șasea zecimală a numărului 2,(123) este egală cu ... .

(5p) **3.** 36% din 50 este egal cu ... .

(5p) **4.** Complementul unghiului cu măsura de 83° este egal cu ...°.

(5p) **5.** Aria laterală a unui cilindru circular drept cu raza de 6 cm și înălțimea de 3 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** Într-un depozit de fructe s-a adus marfă, în total 20 tone. Conform diagramei alăturate, în depozit s-au adus ... tone de mere.



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă hexagonală $ABCDEFMNPQRS$.

(5p) **2.** Un elev a citit 60% dintr-o carte, adică 120 pagini. Aflați numărul paginilor cărții.

(5p) **3.** Media geometrică a două numere este 15. Știind că unul dintre numere este 9, determinați celălalt număr.

(5p) **4.** Arătați că $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-x-3}=\dfrac{2x+3}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1,5\}$.

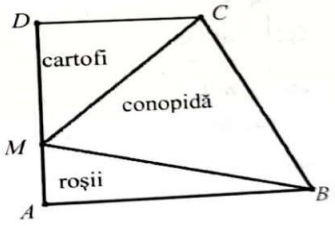
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{4}\cdot x-1$.

(5p) ***a)*** Calculați $f(-4)\cdot f(4)$.

(5p) ***b)*** Determinați punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura alăturată este reprezentată schematic grădina lui Mihai, în formă de trapez dreptunghic, care este împărțită în trei parcele. Pe parcela MDC a cultivat cartofi, pe parcela MAB roșii, iar pe parcela MBC conopidă. Se știe că $AB=12$ dam, $DC=6$ dam, $AD=9$ dam, $DM=x$, unde x este o distanță exprimată în decametri.



(5p) ***a)*** Calculați, în funcție de x, aria parcelei DMC.

(5p) ***b)*** Determinați x, știind că aria parcelei DMC este egală cu aria parcelei BMA.

(5p) ***c)*** Se consideră $x=6$ dam. Știind că Mihai recoltează de pe 1 ar de teren în medie 10 kg roșii, 20 kg cartofi și 18 kg conopidă, iar prețul pentru 1 kg de roșii este 5 lei, pentru 1 kg de cartofi 2 lei și pentru 1 kg de conopidă 3,5 lei, determinați ce sumă încasează din vânzarea legumelor din grădina $ABCD$.

2. Un recipient are forma unei prisme drepte cu bazele triunghiuri echilaterale $ABCA'B'C'$. Se știe că $AB=30$ cm și $AA'=15$ cm.

(5p) ***a)*** Calculați volumul prismei.

(5p) ***b)*** Stabiliți dacă în recipient încap 6 litri de apă ($\sqrt{3}=1,7$).

(5p) ***c)*** Calculați distanța de la punctul A' la dreapta BC.

Testul 12

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(-1)^5+(-1)^4$ este egal cu ... .

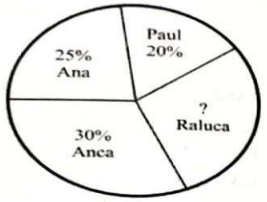
(5p) **2.** Dintre numerele $\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{4}$, este mai mare numărul ... .

(5p) **3.** Dacă $\overline{53x}$ este divizibil cu 2, atunci cea mai mare valoare a lui x este egală cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 120°. Celelalte două unghiuri vor avea fiecare măsura egală cu ... °.

(5p) **5.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are muchia bazei mari de 6 cm, muchia bazei mici de 4 cm și înălțimea de 1 cm.Apotema trunchiului este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Un pachet de bomboane a fost împărțit la patru copii conform diagramei următoare. Procentul de bomboane primit de Raluca este egal cu ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Un elev pregătește lecțiile de la ora 15^{20} până la ora 19^{10}. Cât timp durează pregătirea lecțiilor, știind că în acest interval orar elevul face o pauză de 50 minute?

(5p) **3.** Un pescar a prins un pește. Coada are 1,5 kg, capul cântărește cât coada și jumătate din trunchi, iar trunchiul cât capul și coada la un loc. Determinați masa peștelui.

4. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-3x$.

(5p) *a)* Determinați coordonatele punctului de pe graficul funcției care are ordonata egală cu triplul abscisei.

(5p) *b)* Determinați sinusul unghiului format de graficul funcției f și axa absciselor.

(5p) **5.** Arătați că numărul $(x^2+5x)(x^2+5x+2)+1$ este pătrat perfect, pentru orice $x\in\mathbb{N}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În fața unei școlii este o alee în formă de dreptunghi cu lungimea de 20 m. Aleea se pavează cu dale de beton, în formă de pătrat cu latura de 0,4 m, așezate pe 3 rânduri.

(5p) *a)* Calculați numărul dalelor necesare pavării aleii.

(5p) *b)* Determinați lățimea aleii.

(5p) *c)* Știind că 1 m^2 de pavaj costă 42 lei, determinați prețul pavajului folosit.

2. O echipă de muncitori sapă o groapă în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=5$ m, $BC=4$ m și $AA'=2,5$ m.

(5p) *a)* Calculați volumul pământului scos din groapă.

(5p) *b)* Dacă pământul scos este așezat peste un teren dreptunghiular cu dimensiunile de 0,4 hm și 2,5 dam, atunci calculați cu câți cm se va înălța nivelul pământului pe acest teren.

(5p) *c)* Câți metri ar mai trebui săpați în adâncime pentru ca volumul gropii să fie de 60 m^3?

Testul 13

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9^2-4\cdot7:2$ este egal cu ... .

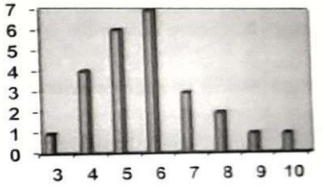
(5p) **2.** Fie mulțimile $A=\{-5,-3,-1,0,4\}$ și $B=\{-5,-1,0,7\}$. Atunci $A\setminus B=\{...\}$

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 23 de bile roșii și 16 bile negre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie roșie este egală cu ... .

(5p) **4.** Lungimea unui cerc este de 10π cm. Lungimea diametrului cercului este de ... cm.

(5p) **5.** Aria totală a unei prisme drepte cu bazele triunghiuri echilaterale este egală cu $144+16\sqrt{3}$ cm^2, iar aria ei laterală este egală cu 144 cm^2. Muchia bazei acestei prisme este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Cei 25 de elevi ai unei clase au obținut la un test de evaluare următoarele rezultate reprezentate în graficul alăturat. Pe axa verticală este reprezentat numărul de elevi, iar pe axa orizontală nota la test. Conform graficului au obținut note foarte bune (8, 9 sau 10) un număr de ... elevi.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cilindru circular drept cu secțiunea axială un pătrat notat $ABCD$.

(5p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor $a=\left|\sqrt{3}-2\right|$ și $b=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

3. O subunitate militară a fost așezată în rânduri de câte patru militari, altă dată în rânduri de câte cinci militari, iar dacă sunt așezați câte șase militari pe rând, de fiecare dată rămân câte trei militari care nu formează un rând complet.

(5p) *a)* Verificați dacă pot fi 123 de militari în subunitate.

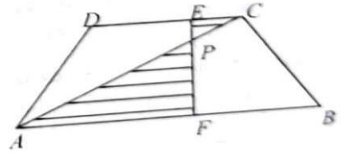
(5p) *b)* Determinați numărul minim de militari din subunitate.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați numerele reale a și b știind că punctele $A(-1,0)$ și $B(1,4)$ se găsesc pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O curte are forma unui trapez isoscel $ABCD$, cu $AB=10$ dam, $DC=6$ dam, $BC=2\sqrt{5}$ dam. Se știe că $DC=3\cdot EC$, $EF\perp AB$ și $AC\cap EF=\{P\}$ (vezi figura alăturată).



(5p) *a)* Calculați aria suprafeței curții.

(5p) *b)* Proprietarul vrea să împrejmuiască cu gard de sârmă această curte. Câți metri liniari de sârmă trebuie să cumpere? Aproximați rezultatul prin adaos la un număr natural.

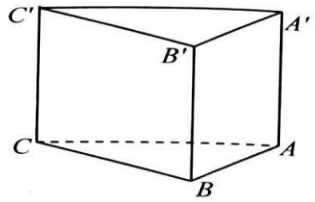
(5p) *c)* Calculați lungimea segmentului $[AF]$.

(5p) *d)* Porțiunea hașurată este plantată cu pomi. Aflați aria porțiunii plantată cu pomi.

2. În figura alăturată, $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale și $AB = AA' = 2\sqrt{3}$ m.

(5p) *a)* Calculați aria totală a prismei.

(5p) *b)* Determinați volumul prismei, exprimat în litri.



Testul 14

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $169:13-9$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dintre numerele $a = 3\sqrt{2}$ și $b = 2\sqrt{3}$, mai mare este numărul ... .

(5p) **3.** Restul împărțirii numărului 734 la 8 este egal cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are perimetrul egal cu 36 cm. Latura triunghiului este egală cu ... .

(5p) **5.** Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral de latură $8\sqrt{3}$ cm. Înălțimea conului este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Într-un sertar sunt trei perechi de ciorapi: una albă, una roșie și una neagră. Numărul minim de ciorapi pe care trebuie să îi scoată cineva (pe întuneric) pentru a fi sigur că a scos cel puțin o pereche de ... ciorapi.

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Un elev a citit într-o zi 70% dintr-o carte care are 240 de pagini. Determinați numărul paginilor pe care le mai are de citit elevul.

3. Fiecare dintre cei 320 de elevi ai unei școli cunoaște cel puțin una din limbile franceză și engleză. 164 elevi cunosc limba franceză și 240 cunosc limba engleză.

(5p) *a)* Determinați numărul elevilor care cunosc ambele limbi.

(5p) *b)* Determinați numărul elevilor care cunosc numai limba franceză.

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (1-m)x + m + 2n - 4$, unde m și n sunt numere reale. Determinați numerele reale m și n știind că punctele $A(-1,1)$ și $B(-2,0)$ aparțin graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\dfrac{x^2-81}{x^3+18x^2+81x} = \dfrac{x-9}{x(x+9)}$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-9\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Pe o parcelă în formă de pătrat cu perimetrul de 64 m s-au plantat vinete. Se știe că pe fiecare m^2 de teren sunt 16 fire de vinete și că de pe fiecare fir se obțin aproximativ 5 kg vinete.

(5p) *a)* Calculați aria parcelei.

(5p) *b)* Determinați masa vinetelor recoltate de pe întreaga parcelă.

(5p) *c)* Știind că 1 kg de vinete costă 1,5 lei, calculați suma de bani încasată de proprietar, dacă a vândut întreaga cantitate de vinete recoltată.

2. O cameră are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4 m. Punctul P reprezintă un păianjen situat pe peretele $ABB'A'$ la distanța de 1 m față de muchiile AB și BB', iar punctul M reprezintă o muscă situată pe peretele $CDD'C'$ la distanța de 1 m față de muchiile DD' și $D'C'$.

(5p) *a)* Demonstrați că punctele P, B', M și D sunt coplanare.

(5p) *b)* Calculați lungimea celui mai scurt drum pe care trebuie să-l parcurgă păianjenul pentru a ajunge la muscă (păianjenul se poate deplasa doar pe podea, pe pereți și pe tavan).

(5p) *c)* Determinați distanța de la muscă la dreapta BB'.

Testul 15

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9\sqrt{200} : 3\sqrt{10}$ este egal cu ... .

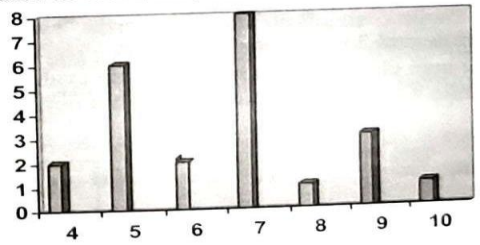
(5p) **2.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară o față cu un număr de puncte cel puțin egal cu patru este egală cu ... .

(5p) **4.** În cercul de rază 10 cm se construiesc razele OA și OB care formează un unghi cu măsura de 60°. Lungimea coardei AB este egală cu ... .

(5p) **5.** Aria unei fețe a unui tetraedru regulat de muchie 6 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la un test sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform acestui grafic, media clasei este de egală cu ... . (Pe axa verticală este reprezentat numărul de elevi, iar pe axa orizontală nota la test.)



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Pe două rafturi se află 120 de cărți. Pe primul raft sunt de cinci ori mai puține cărți decât pe al doilea. Determinați numărul cărților de pe al doilea raft.

3. Dintr-o lungime de 1 km luăm o doime, din rest luăm o treime, din noul rest luăm o pătrime și așa mai departe.

(5p) *a)* După câte operații de acest tip luăm o lungime strict mai mică decât 1 mm?

(5p) *b)* După câte operații de acest tip rămâne o lungime mai mică de 1 mm?

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$. Determinați punctul care aparține graficului funcției f și are coordonatele egale.

(5p) **5.** Arătați că $\left[\dfrac{6x-12}{(x-2)^2} - \dfrac{5x-15}{(x-3)^2}\right] : \dfrac{2}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-8}{2}$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

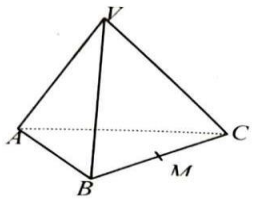
1. Terenul de sport al unei școli este în formă de dreptunghi cu perimetrul de 200 m și lungimea de trei ori mai mare decât lățimea. Terenul este înconjurat de o pistă cu lățimea de 2,5 m. Calculați:

(5p) *a)* dimensiunile terenului de sport;

(5p) *b)* aria terenului de sport;

(5p) *c)* perimetrul exterior al pistei.

2. În figura alăturată, piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = 5$ cm, iar înălțimea bazei de trei ori mai mare decât înălțimea piramidei. Fie M mijlocul lui $[BC]$.



(5p) *a)* Arătați că apotema piramidei este egală cu $5\sqrt{2}$ cm.

(5p) *b)* Calculați măsura unghiului diedru format de fața laterală (VBC) cu planul bazei.

(5p) *c)* Calculați aria totală a piramidei.

Testul 16

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $144 : 6 - 4$ este egal cu ... .

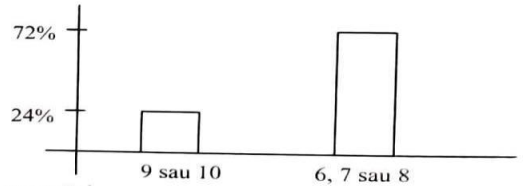
(5p) **2.** Numărul *„două cincimi”* scris sub formă de fracție zecimală este egal cu ... .

(5p) **3.** Media geometrică a numerelor 8 și 32 este egală cu ... .

(5p) **4.** Linia mijlocie a unui trapez este de 15 m. Suma lungimilor bazelor trapezului este egală cu ... m.

(5p) **5.** Volumul unei sfere de rază 3 m este egal cu ... m^3.

(5p) **6.** Cei 25 de elevi ai unei clase au susținut un test de evaluare. Rezultatele obținute sunt reprezentate în grafic. Conform graficului au obținut note sub 6 un număr de ... elevi.



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, piramida patrulateră regulată $VABCD$ de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** La o librărie s-au vândut într-o zi 200 de caiete de matematică și de dictando și s-a încasat suma de 270 lei. Știind că un caiet de matematică costă 1,8 lei, iar unul de dictando costă 1,2 lei, determinați numărul caietelor din fiecare tip vândute.

3. Un cub vopsit în roșu a fost tăiat în 125 de cubulețe identice cu muchia de 1 cm.

(5p) *a)* Determinați lungimea muchiei cubului.

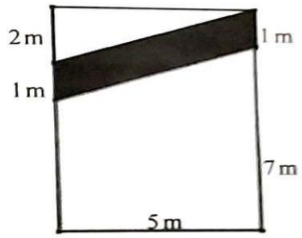
(5p) *b)* Câte dintre cubulețele mici nu au nicio față vopsită? Dar câte au o singură față vopsită?

(5p) **4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2} - 1$. Aflați valoarea funcției f pentru $x = -2\sqrt{2}$.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = (x+3)^2 + 2(x-4)(x+3) + (x-4)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x) = (2x-1)^2$, pentru orice număr real x.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O familie și-a amenajat pardoseala sufrageriei ca în figura alăturată.



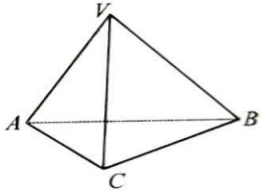
(5p) *a)* Calculați aria suprafeței cu gresie albă.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței cu gresie gri.

(5p) *c)* Calculați aria suprafeței cu gresie neagră.

(5p) *d)* Știind că 1 m^2 de gresie costă 31 lei, determinați prețul gresiei din sufragerie.

2. În figura următoare, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu apotema bazei $OM = 3$ cm și înălțimea piramidei $VO = 3\sqrt{3}$ cm.



(5p) *a)* Calculați aria laterală a piramidei.

(5p) *b)* Determinați volumul piramidei.

Testul 17

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2,25 - 1,715$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numărul *„trei sferturi”* scris sub formă de fracție ordinară este egal cu ... .

(5p) **3.** Împărțind un număr la 11 obținem câtul 3 și restul 6. Numărul este egal cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi isoscel ABC $(AB = AC)$ are $BC = 3$ cm, iar $AB = 2BC$. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu ... cm.

(5p) **5.** Un cerc are raza de 6 cm. Aria discului este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** Fie mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{24} < x < \sqrt{256}\right\}$. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie prim este ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Mama are 40 de ani, iar fiica 16 ani. Determinați cu câți ani în urmă mama era de 3 ori mai în vârstă decât fiica.

3. Mai multe colete conțin cărți și caiete. Fiecare colet conține caiete și cărți, în total 10 bucăți. Un caiet costă 2,4 lei și o carte costă 9 lei.

(5p) *a)* Ce rest primește o persoană dacă are o bancnotă de 100 lei și cumpără 3 caiete și 3 cărți?

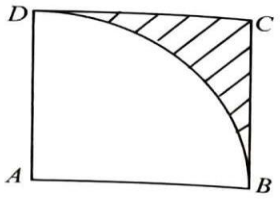
(5p) *b)* Care e prețul minim al unui colet care conține cel puțin 3 caiete și cel puțin 2 cărți?

(5p) **4.** Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 4$, $g(x) = x \cdot 0,(3) + 1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale celor două funcții.

(5p) **5.** Se dă fracția $F(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Arătați că $F(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O curte are forma unui pătrat $ABCD$ de latură 40 m. Pe sectorul circular de centru A și rază AB, proprietarul plantează flori, iar în porțiunea rămasă (cea haşurată) plantează gazon. Se consideră $\pi = 3,14$.



(5p) *a)* Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

(5p) *b)* Determinați aria sectorului circular plantat cu flori.

(5p) *c)* Calculați aria porțiunii plantată cu gazon.

(5p) *d)* Știind că 1 kg de sămânță de gazon costă 8 lei, calculați cât a costat în total sămânța dacă, pentru fiecare metru pătrat sunt necesare 1,5 kg de sămânță.

2. Din unul dintre colțurile unui cub din lemn cu latura de 4 cm s-a îndepărtat o bucată de formă cubică având latura de 2 cm.

(5p) *a)* Calculați volumul bucății îndepărtate.

(5p) *b)* Calculați volumul și aria totală a corpului astfel obținut.

Testul 18

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Numărul de 15 ori mai mic decât 1260 este egal cu ... .

(5p) **2.** Fie mulțimea $A = \left\{\frac{6}{3}; -2 : \sqrt{3}; -1,0(7); \sqrt{9}; 3,5; 1,5; -\pi\right\}$. Atunci $A \cap \mathbb{Z} = \{ \ldots \}$.

(5p) **3.** 3,5 litri = ... cm^3.

(5p) **4.** Catetele unui triunghi dreptunghic sunt de 5 cm și 12 cm. Ipotenuza triunghiului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Aria unei sfere cu raza de 1 dm este ... cm^2.

(5p) **6.** Situația notelor obținute de elevii unei clase la un test este ilustrată în tabelul alăturat. Media clasei la test este egală cu ... .

Nota	10	9	8	7	6	5	4
Nr. elevi	2	3	6	6	5	1	2

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, piramida patrulateră regulată $VABCD$ de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Într-o școală sunt 425 de elevi, iar în altă școală sunt de două ori mai mulți elevi. Determinați numărul elevilor din cele două școli.

3. Împărțind un număr natural n la numerele 45, 36 și 54 se obțin câturi nenule și, de fiecare dată restul 2.

(5p) *a)* Determinați cel mai mic număr natural cu această proprietate.

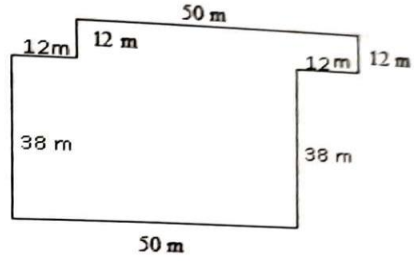
(5p) *b)* Aflați toate numerele cu această proprietate astfel încât $1500 < n < 2600$.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{3}$. Arătați că punctul $A(1, 2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

(5p) **5.** Arătați că, pentru orice număr real x, are loc: $(x+5)^3 - x - 5 = (x+4)(x+5)(x+6)$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un teren are forma din figura alăturată.



(5p) *a)* Calculați aria și perimetrul terenului.

(5p) *b)* De câte scânduri cu lungimea de 25 cm este nevoie pentru construirea unui gard în jurul acestui teren?

(5p) *c)* Care este volumul acestor scânduri dacă grosimea lor este de 2 cm, iar înălțimea gardului este de 2 m?

2. O cutie de chibrituri cu dimensiunile de 15 mm, 35 mm și 50 mm.

(5p) *a)* Care este probabilitatea ca, aruncând cutia să cadă pe fața cu aria de 5,25 cm^2 ?

(5p) *b)* Dacă volumul unui băț este de 650 mm^3, care este numărul maxim de bețe aflat într-o cutie?

(5p) *c)* Câte zaruri cu muchia de 5 mm pot fi aranjate în cutie (făcând abstracție de grosimea pereților cutiei)?

Testul 19

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2^2 \cdot 5 : 10 - 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Soluția ecuației $3x + 6 = 18$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Media aritmetică a două numere este 40. Unul din numere este 16, iar celălalt număr este egal cu ... .

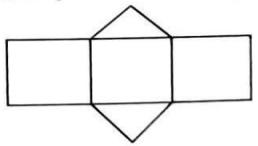
(5p) **4.** Alegând la întâmplare o cifră din numărul 37965, probabilitatea ca aceasta să reprezinte un multiplu de 3 este egală cu ... .

(5p) **5.** Volumul conului circular drept cu raza de 5 cm și înălțimea de 9 cm este egal cu ... cm^3.

(5p) **6.** Numărul numerelor întregi din intervalul $[-5; 6)$ este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, corpul a cărui desfășurare este în figura de mai jos.



(5p) **2.** Un obiect costă 240 lei și se scumpește cu 10%. Determinați noul preț al obiectului.

(5p) **3.** Arătați că $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 10x + 21} = \frac{x-5}{x+7}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -7\}$.

4. Se dau numerele $a = \sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$ și $b = \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

(5p) *a)* Calculați $a \cdot b$.

(5p) *b)* Arătați că $(a-b)^2 = 16$.

(5p) **5.** Suma a două numere reale este 60. Împărțind primul număr la al doilea număr se obține câtul 2 și restul 3. Determinați cele două numere.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Două loturi au aceeaşi arie. Primul lot are formă de pătrat cu latura de 600 m, iar al doilea lot are formă de dreptunghi cu o latură de 400 m.

(5p) *a)* Primul lot se împrejmuieşte cu un gard de sârmă, cu 5 rânduri. Calculaţi lungimea sârmei folosite.

(5p) *b)* Determinaţi a doua dimensiune a lotului în formă de dreptunghi.

(5p) *c)* Câţi lei se încasează pe recolta de grâu de pe al doilea lot dacă producţia medie la hectar este de 4000 kg, iar 1 kg de grâu se vinde cu 0,8 lei ?

2. Un vas în formă de cub cu muchia de 12 dm conţine apă până la înălţimea de 80 cm.

(5p) *a)* Calculaţi volumul apei din vas, exprimat în litri.

(5p) *b)* Calculaţi aria laterală a vasului.

(5p) *c)* De câţi litri de apă mai este nevoie pentru a umple vasul ?

Testul 20

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** 30% din 120 este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $6\cdot(x+2)=42$, atunci numărul real x este egal cu ... .

(5p) **4.** Triunghiul ABC are laturile $AB=3, AC=4, BC=5$. Aria triunghiului ABC este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Latura cubului care are diagonala de $9\sqrt{3}$ este egală cu ... .

(5p) **6.** La un test, cei 16 elevi ai clasei au obţinut următoarele note: 2 note de 4, 3 note de 6, 5 note de 8, 4 note de 9 şi 2 note de 10. Media clasei este egală cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un trunchi de con circular drept cu secţiunea axială având diagonalele perpendiculare.

(5p) **2.** Traseul unei excursii a fost străbătut în patru etape în felul următor: în prima etapă $\frac{2}{7}$ din întregul drum; în a doua etapă, $\frac{1}{4}$ din ce a rămas de parcurs; în etapa a treia, $\frac{1}{3}$ din restul drumului, iar în ultima etapă, 200 km. Determinaţi lungimea traseului.

(5p) **3.** Determinaţi ultima cifră a numărului $A=330^{1991}+331^{1992}+335^{1993}+336^{1994}$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

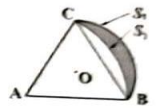
(5p) *a)* Determinaţi numerele reale a şi b ştiind că punctele $A(-1,0)$ şi $B(1,4)$ se găsesc pe graficul funcţiei.

(5p) *b)* Dacă $a=b=2$, reprezentaţi graficul funcţiei într-un sistem de coordonate ortogonale.

(5p) **5.** Arătaţi că $\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x}{1-x}+\frac{4x}{x^2-1}=\frac{2(1-x)}{1+x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu lungimea laturii de 18 cm, S_1 este sectorul de cerc de centrul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar S_2 este sectorul de cerc de centrul A.



(5p) *a)* Determinaţi aria porţiunii cuprinse între sectorul de cerc S_2 şi latura BC.

(5p) *b)* Calculaţi perimetrul figurii haşurate.

(5p) *c)* Arătaţi că aria figurii haşurate este egală cu $18\cdot\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ cm^2.

2. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată de vârf V şi bază $ABCD$. Latura bazei $AB=6\sqrt{6}$ cm, iar apotema piramidei $VM=6\sqrt{3}$ cm.

(5p) *a)* Arătaţi că înălţimea piramidei este egală cu $3\sqrt{6}$ cm.

(5p) *b)* Calculaţi aria laterală şi volumul piramidei.

(5p) *c)* Determinaţi măsura unghiului planelor a două feţe laterale opuse.

Testul 21

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9^2-4\cdot7:2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Împărţind un număr la 11 obţinem câtul 3 şi restul 6. Numărul este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $\frac{x}{4}=\frac{5}{0,2}$, atunci x este egal cu ... .

(5p) **4.** Triunghiul echilateral ABC are perimetrul de 36 cm. Aria sa este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Volumul cubului care are diagonala unei feţe de $5\sqrt{2}$ cm este egal cu ... cm^3.

(5p) **6.** Numărul elevilor din lotul de atletism şi vârsta lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârsta (ani)	12	13	14	15
Număr elevi	3	2	4	5

Numărul elevilor din lot este egal cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un con circular drept.

(5p) **2.** Numerele naturale a şi b sunt direct proporţionale cu 11, respectiv 4. Aflaţi a şi b ştiind că împărţind numărul a la numărul b obţinem câtul 2 şi restul 30.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-m)x+m+2n-4$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

(5p) *a)* Determinaţi m şi n ştiind că punctele $A(-1,1)$ şi $B(-2,0)$ se află pe graficul f.

(5p) *b)* Pentru $m=0$ şi $n=3$, reprezentaţi grafic funcţia.

(5p) **4.** După ce în prima zi a cheltuit o treime din suma pe care o avea, iar în a doua zi 150 lei, unui elev i-a rămas 25% din suma iniţială. Determinaţi suma iniţială a elevului.

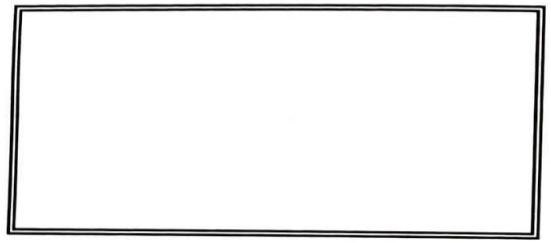
(5p) **5.** Arătaţi că $x-\left(\frac{1}{x-3}+\frac{7-x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}\right):\frac{x+2}{2(x-1)}=x+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un teren are forma unui dreptunghi cu dimensiunile (exprimate în dam) egale cu cele mai mici două numere prime. Se împrejmuieşte terenul cu cinci rânduri de gard de sârmă.

(5p) ***a)*** Calculaţi lungimea sârmei care trebuie cumpărată.

(5p) ***b)*** Pe suprafaţa terenului se însămânţează gazon. Determinaţi preţul gazonului necesar, ştiind că un kilogram costă 12,5 lei, iar pentru un metru pătrat de teren este nevoie de 120 grame de gazon.



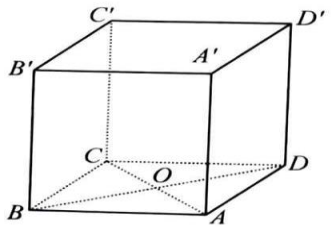
2. În figura următoare este reprezentată o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele pătrate în care $AB = 8$ cm şi AA' este egal cu trei pătrimi din AB. Punctul O este centrul pătratului $ABCD$.

(5p) ***a)*** Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele CD şi BB'.

(5p) ***b)*** Calculaţi aria totală a prismei.

(5p) ***c)*** Determinaţi volumul prismei, exprimat în litri.

(5p) ***d)*** Calculaţi distanţa de la punctul B' la dreapta AD'.



Testul 22

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $169:13-9$ este egal cu ... .

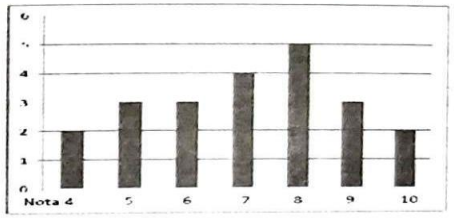
(5p) **2.** Dacă $x^2-9=(x+a)(x+b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a,b \in \mathbb{Z}$, atunci produsul $a \cdot b$ este ... .

(5p) **3.** O persoană a cumpărat într-o zi 4,7 m de stofă, iar în a doua zi cu 1,3 m mai mult. În cele două zile persoana a cumpărat ... m de stofă.

(5p) **4.** Dreptunghiul $ABCD$ are lăţimea $BC = 6$ cm şi diagonala $AC = 10$ cm. Lungimea AB a dreptunghiului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** O sferă are raza de 5 cm. Aria sferei este egală cu ... π cm^2.

(5p) **6.** La un test de matematică, elevii clasei a VIII-a B au obţinut următoarele rezultate:



Numărul elevilor din clasa a VIII-a B este egal cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un tetraedru notat $PONT$.

(5p) **2.** Arătaţi că numărul $1997+2\cdot(1+2+\ldots+1996)$ este pătrat perfect.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) ***a)*** Reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) ***b)*** Determinaţi punctul de pe graficul funcţiei f care are coordonatele egale.

(5p) **4.** Determinaţi numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, pentru care $\overline{ab}=5a+3b$.

(5p) **5.** Arătaţi că $\left[\frac{6x-12}{(x-2)^2}-\frac{5x-15}{(x-3)^2}\right]:\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{x-8}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O grădină de forma unui triunghi echilateral este împărţită în şase *sectoare* distincte de către cele trei înălţimi ale triunghiului. Ştiind că aria unui astfel de *sector* este de $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ dam^2, calculaţi:

(5p) ***a)*** aria totală a grădinii;

(5p) ***b)*** lungimea gardului exterior pe care proprietarul grădinii îl va cumpăra.

2. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are muchia $VA = 12\sqrt{3}$ cm şi înălţimea $VO = 18$ cm.

(5p) ***a)*** Arătaţi că apotema piramidei este egală cu $3\sqrt{39}$ cm.

(5p) ***b)*** Calculaţi aria laterală şi volumul piramidei.

(5p) ***c)*** Calculaţi distanţa de la centrul bazei O la o faţă laterală.

(5p) ***d)*** Determinaţi măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

Testul 23

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $116:29+17-9$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Un elev a citit într-o zi 70% dintr-o carte care are 240 de pagini. El mai are de citit un număr de ... pagini.

(5p) **3.** Dintre numerele $5\sqrt{3}$ și $3\sqrt{5}$, mai mare este ... .

(5p) **4.** ABC este un triunghi dreptunghic având cateta $AB = 8$ cm, iar cateta AC este cu 2 cm mai mică decât AB. Lungimea ipotenuzei triunghiului este de ... cm.

(5p) **5.** Volumul unui cilindru circular drept cu raza bazei 5 cm și înălțimea de 8 cm este egal cu ... π cm^3.

(5p) **6.** Rezultatele la testarea inițială la clasa a opta au fost cele din tabel:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	3	5	4	3	2

Numărul elevilor care au obținut note peste 5 este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ de vârf V și bază ABC.

(5p) **2.** Determinați rădăcina pătrată a soluției ecuației $(2x-3)\cdot|8-\sqrt{65}| = 5(\sqrt{65}-8)$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(1,2)$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic punctele A și B.

(5p) *b)* Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, a cărei reprezentare grafică este dreapta AB.

(5p) **4.** Într-un oraș sunt în prezent 484000 de locuitori. Populația acestui oraș a crescut în fiecare din ultimii doi ani cu 10%. Câți locuitori erau în oraș acum doi ani ?

(5p) **5.** Arătați că: $E(x)=\left(\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}\right):\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right)=2x$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1,2\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu catetele de 6 și, respectiv 8 m. Se notează cu D mijlocul ipotenuzei. Costel pleacă din B pe traseul $B-D-A$, iar Gabi pleacă din C pe traseul $C-D-A$.

(5p) *a)* Comparați lungimile celor două trasee.

(5p) *b)* Determinați ariile celor două triunghiuri cu interioarele disjuncte formate în interiorul triunghiului ABC.

(5p) *c)* Calculați distanța de la punctul D la dreapta AB, știind că AB=6 cm.

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Diferența dintre pătratul diagonalei bazei și dublul pătratului înălțimii este 25 cm^2, iar perimetrul bazei este de 26 cm. Înălțimea este medie proporțională între dimensiunile bazei.

(5p) *a)* Arătați că L= 9 cm, l= 4 cm și h= 6 cm.

(5p) *b)* Calculați aria totală a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) *c)* Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

Testul 24

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(130-5\cdot19):5$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dintre cei 320 de elevi ai unei școli, 40% sunt în învățământul primar. Numărul elevilor care sunt în învățământul primar este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $\frac{3}{x}=\frac{5}{4}$, atunci numărul real nenul x este egal cu ... .

(5p) **4.** Triunghiul ABC este isoscel, cu $AB=AC$. Măsura unghiului BAC este de 70°. Atunci $m(\sphericalangle ABC)$ este egală cu ...°.

(5p) **5.** $ABCDA'B'C'D'$ este un cub în care $AB'=5\sqrt{2}$ cm. Lungimea diagonalei cubului este egală cu ... cm

(5p) **6.** Într-o urnă sunt 29 bile albe și 21 bile negre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este egală cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Determinați patru numere naturale știind că primul este o cincime din al doilea, al doilea este o treime din al treilea, al treilea este o doime din al patrulea, iar al patrulea este cu 59 mai mare decât primul.

(5p) **3.** Fie mulțimea $A=\left\{3,-\sqrt{2},0,-5,\sqrt{3},\pi,\sqrt{4},\frac{5}{3}\right\}$. Determinați $A\cap\mathbb{Z}$ și $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

4. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+4, g(x)=\frac{x}{3}+1$.

(5p) *a)* Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

(5p) *b)* Rezolvați ecuația $3f(x)+g(4x-1)=8$.

(5p) **5.** Arătați că $E(x)=\left(\frac{x}{x-2}-\frac{1}{4-x^2}+\frac{3x}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{x^2+4x+4}{4x^2-1}\right)\cdot\frac{2x+1}{x+2}=\frac{2x-1}{x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2,2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O grădină de forma unui pătrat $ABCD$ cu latura de 10 m are în interiorul său un alt pătrat $MNPQ$ cu vârfurile în mijloacele M, N, P, Q ale laturilor grădinii $[DC]$, $[BC]$, $[AB]$ și respectiv $[AD]$. Pătratul din interior se acoperă cu pavele de ciment.

(5p) *a)* Aflați cât ciment trebuie să se cumpere, dacă la 1 m^2 intră 4 kg de ciment.

(5p) *b)* Pe restul suprafeței se plantează gazon. La 1 m^2 sunt necesare 250 de grame de gazon. Cât costă gazonul ce trebuie cumpărat dacă un kilogram costă 12,5 lei?

(5p) *c)* Calculați distanța de la punctul A la dreapta MN.

2. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Știm că AB = 6 cm, BC = 12 cm și MD' = 12 cm, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$.

(5p) *a)* Arătați că înălțimea paralelipipedului este egală cu $6\sqrt{2}$ cm.

(5p) *b)* Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic.

(5p) *c)* Calculați măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și (AMD').

Testul 25

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $7-5\cdot 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{4}{5}=\frac{n}{10}$, atunci valoarea numărului natural n este egală cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le x<6\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Dacă diametrul unui cerc este egal cu 12 cm, atunci lungimea cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din *Figura 1* are toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VB și AD este egală cu ... °.

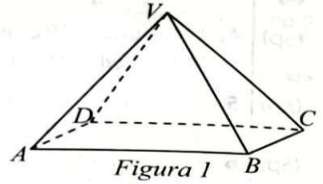


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obținut note cel puțin egale cu 7 este egal cu ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cilindru circular drept.

(5p) **2.** Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, $b\neq 0$, știind că acesta împărțit la b dă câtul 3 și restul a.

(5p) **3.** Un biciclist a parcurs un traseu în 3 zile. În prima zi a parcurs 30% din traseu, iar în a doua zi $\frac{1}{2}$ din cât mai avea de parcurs. Dacă bicicliștul mai are de parcurs în a treia zi 14 km din traseu, atunci determinați lungimea drumului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(2m,-7)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Dacă $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{x+a}{x+b}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, arătați că $a+b$ este număr întreg.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un stup în formă de cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei de 20 cm conține 2 litri de miere.

(5p) ***a)*** Calculați volumul cubului, exprimat în litri.

(5p) ***b)*** Calculați înălțimea la care se ridică mierea în cub.

(5p) ***c)*** O albină pleacă din punctul A, intersectează muchia BB' într-un punct M și ajunge, pe drumul cel mai scurt, în punctul C'. Albina se deplasează pe fețele laterale ale stupului. Determinați lungimea segmentului $[BM]$.

2. *Figura 2* reprezintă schița unui teren format din patru pătrate, fiecare pătrat având latura de 2 dam. Terenul este străbătut de aleile AB, BC și CA. În interiorul triunghiului ABC sunt flori, iar pe restul terenului gazon.

(5p) ***a)*** Calculați aria suprafeței acoperită cu gazon.

(5p) ***b)*** Verificați dacă aria suprafeței cu flori este mai mare decât aria suprafeței cu gazon.

(5p) ***c)*** Arătați că perimetrul triunghiului ABC este mai mic decât 12 dam.

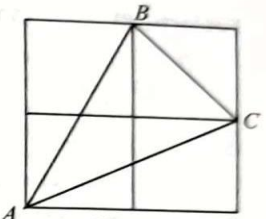


Figura 2

Testul 26

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $5\cdot 3-17$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4\}$, acesta să fie pătrat perfect este egală cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A=\{x\,|\,x<3,\ x\in\mathbb{R}\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are o linie mijlocie de 4 cm. Perimetrul triunghiului echilateral este egal cu ... cm.

(5p) **5.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din *Figura 1* are toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VA și VC este egală cu ... °.

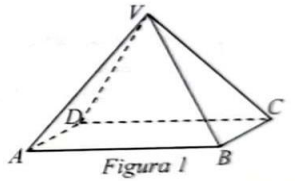


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obținut note divizibile cu 3 este egal cu ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ de vârf V și bază $ABCDEF$.

(5p) **2.** Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, știind că $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{2}{9}$.

(5p) **3.** Mama este cu 24 de ani mai mare decât fiul său. Peste 7 ani, vârsta mamei va fi de 4 ori mai mare decât vârsta fiului. Determinați vârsta mamei și vârsta fiului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-3x$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) ***b)*** Determinați p pentru care punctul $A(p,4)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x^2-4}\right):\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}+1\right)=\frac{7}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În *Figura 2* este ilustrată schița unui teren, unde $ABDC$ este un pătrat cu latura 12 dam, iar $BEFM$ un dreptunghi cu $BE = 16$ dam și $MB = x$ dam, unde $0 < x < 12$.

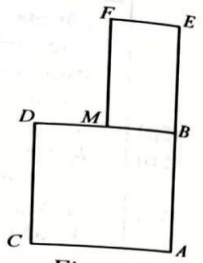


Figura 2

(5p) *a)* Exprimați în funcție de x lungimea segmentului DF.

(5p) *b)* Arătați că aria terenului este egală cu $16(9+x)$ dam^2.

(5p) *c)* Dacă $BM = 8$ dam și terenul este cultivat cu grâu, determinați cantitatea recoltată de pe întreg terenul, știind că de pe un hectar se recoltează 2,8 tone grâu.

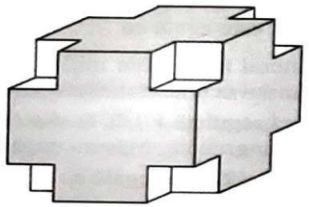
2. În *Figura 3* este reprezentat un cub cu lungimea muchiei de 8 cm din care la fiecare vârf s-a decupat câte un cub cu muchia de 2 cm.

(5p) *a)* Calculați aria totală a corpului obținut.

(5p) *b)* Demonstrați că după decuparea cuburilor din fiecare vârf al cubului dat, volumul corpului este egal cu 87,5% din volumul inițial al cubului mare.

(5p) *c)* Dintr-un cub cu muchia de 8 cm se decupează din fiecare vârf câte un cub cu muchia de x cm. Arătați că nu există un număr natural x, astfel încât volumul corpului rezultat după decupare să fie jumătate din volumul cubului inițial.

Figura 3



Testul 27

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $124 : 4 - 17$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numerele naturale din intervalul $(2;5]$ sunt în număr de ... .

(5p) **3.** Media aritmetică a numerelor $a = 3\sqrt{2}$ și $b = 5\sqrt{2}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Suma lungimilor liniilor mijlocii ale unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Aria laterală a unui con circular drept care are generatoarea de 10 cm și raza bazei de 6 cm este egală cu ... π cm^2.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Probabilitatea ca alegând o lucrare a unui elev din clasă, aceasta să fie evaluată cu o notă mai mare decât 6 este egală cu ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Arătați că $(\sqrt{2}-2)^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$.

(5p) **3.** Diferența a două numere naturale este 18. Dacă împărțim numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 3 și restul 2. Determinați cele două numere.

4. Se consideră funcția $f : \{1;2;3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-2)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\frac{2x^2-7x-17}{x^2-10x+21} - \frac{x+1}{x-7}\right) : \frac{1}{x^2-9} = (x+2)(x+3)$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3;7\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O furnică se deplasează pe apotema (VM) a unui obiect în formă de piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$, punctul M fiind mijlocul laturii (BC).

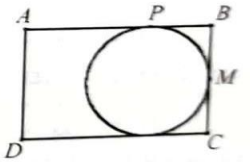
Se știe că $VA = 6$ cm și înălțimea piramidei este de $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ cm.

(5p) *a)* Calculați volumul piramidei.

(5p) *b)* Arătați că apotema piramidei este egală cu latura bazei piramidei.

(5p) *c)* Ajungând în punctul E de pe apotema (VM) a piramidei, furnica se află la cea mai mică distanță AE, față de punctul A. Calculați lungimea segmentului VE.

2. Figura alăturată reprezintă schița unui lac circular, aflat într-o zonă de agrement dreptunghiulară acoperită cu gazon și care este tangent laturilor $[AB]$, $[BC]$ și $[CD]$. Se știe că: $AB = 30$ m și $BC = 20$ m.



(5p) *a)* Calculați aria suprafeței lacului.

(5p) *b)* Verificați dacă aria suprafeței gazonului este mai mică decât aria suprafeței lacului. ($3,14 < \pi < 3,15$).

(5p) *c)* Dacă punctele de tangență cu laturile (AB) și (BC) sunt P și M, atunci determinați aria triunghiului DPM.

Testul 28

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $308 : 4 \cdot 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Amplificând fracția $\frac{5}{8}$ cu 7, se obține fracția ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A = \{x \mid 5 \le x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Un trapez are linia mijlocie de 15 cm. Suma lungimilor bazelor este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din *Figura 1* cu toate muchiile congruente. Dacă $AB = 4$ cm, atunci aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

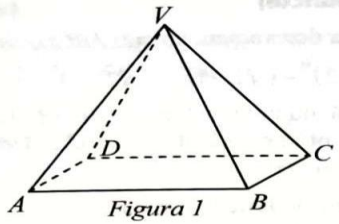


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Media clasei este egală cu ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un con a cărui secțiune axială este triunghi echilateral.

(5p) **2.** Fie mulțimea $B=\left\{\overline{abc}\,\middle|\,\overline{abc}=a+10b+100c\right\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea B, acesta să fie divizibil cu 5.

(5p) **3.** Un aparat de filmat se ieftinește cu 20% din prețul pe care îl are. După un timp aparatul de filmat se scumpește cu 20% din noul preț. După scumpire aparatul costă 1152 lei. Determinați prețul inițial al aparatului de filmat.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) ***b)*** Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre axa Ox și reprezentarea grafică a funcției considerate.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}\right):\frac{1}{x^2-1}=x^2-4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un cort în formă de prismă dreaptă cu bazele triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$ are latura bazei de 3 m și înălțimea de 5 m.

(5p) ***a)*** Calculați distanța de la punctul A la planul $(CC'B')$.

(5p) ***b)*** Determinați volumul cortului.

(5p) ***c)*** Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 54 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua).

2. *Figura 2* reprezintă schița unei grădini formată din patru parcele în formă de pătrat. Aria grădinii este de 100 m^2.

(5p) ***a)*** Calculați aria suprafeței unei parcele.

(5p) ***b)*** Fiecare parcelă este înconjurată de un gard. Determinați lungimea gardului.

(5p) ***c)*** De pe fiecare parcelă se recoltează 50 kg de roșii. Un kg de roșii se vinde cu 2 lei și 50 de bani. Determinați suma de bani obținută din vânzarea roșiilor recoltate din grădină.

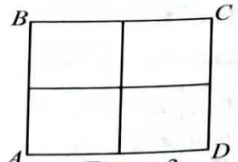


Figura 2

Testul 29

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $111:3-41$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Într-o clasă cu 30 de elevi, 30% sunt băieți. Numărul băieților din clasă este egal cu ... .

(5p) **3.** Fie mulțimea $A=\left\{x\,\middle|\,13<x\le 28,\ x\in\mathbb{N}\right\}$. Numărul elementelor mulțimii A este egal cu ... .

(5p) **4.** Un romb are diagonalele de 6 cm și 12 cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 1* cu $AB=6$ cm. Distanța dintre punctele A și C' este egală cu ... cm.

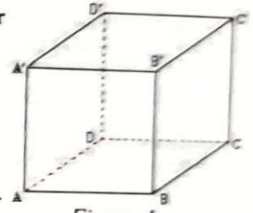
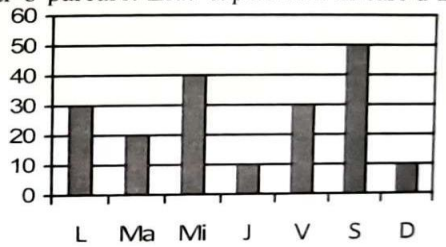


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate numărul de intrări de autoturisme dintr-o parcare. Ziua săptămânii în care a intrat a 110-a mașină este ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de con circular drept.

(5p) **2.** Dacă $a+b=6$, atunci determinați media aritmetică a numerelor a^2; b^2 și $2ab$.

(5p) **3.** Radu și Alexandra au împreună 10 lei. Ei hotărăsc să cumpere împreună o carte, participând cu sume egale de bani. Radu este nevoit să împrumute de la Alexandra 1 leu, iar după cumpărarea cărții Alexandra rămâne cu 5 lei. Determinați suma de bani pe care a avut-o Alexandra inițial.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+3$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(5,3a+1)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O cutie pentru medicamente are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$. Cutia este plină cu 36 de recipiente medicale în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 2 m, 4 m și respectiv 6 m.

(5p) *a)* Arătați că muchia cubului este egală cu 12 m.
(5p) *b)* Calculați aria totală a cubului.
(5p) *c)* Determinați probabilitatea ca, alegând o muchie oarecare a unui paralelipiped dreptunghic din cele 36, aceasta să aibă lungimea de 2 m.

2. *Figura 2* reprezintă schița unui parc în formă de dreptunghi $ABCD$, cu lungimea de 40 m și lățimea de 20 m. În interiorul parcului se află un lac în formă de dreptunghi $MNPQ$ cu lungimea de 20 m și lățimea de 10 m. Lacul este înconjurat de gazon. În lac se află 9 pești.
(5p) *a)* Determinați aria suprafeței acoperite cu gazon.
(5p) *b)* Dacă $AM = BN = CP = DQ$, atunci calculați lungimea segmentului $[AM]$.
(5p) *c)* Arătați că în orice moment în lac există cel puțin doi pești pe o suprafață de 25 m^2.

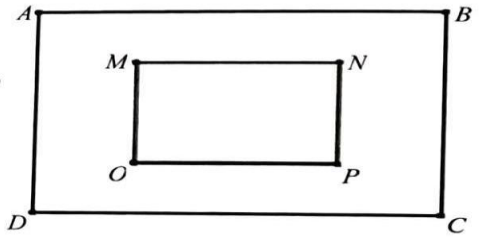


Figura 2

Testul 30

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Scris sub formă de fracție zecimală, numărul $\frac{11}{5}$ este egal cu ... .
(5p) **2.** Dintre numerele $a = 1,4$ și $b = \sqrt{2}$, mai mare este numărul ... .
(5p) **3.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $[-2;3)$ este egal cu ... .
(5p) **4.** Dacă diametrul unui cerc este egal cu 14 cm, atunci lungimea razei cercului este egală cu ... cm.
(5p) **5.** Un cilindru circular drept are raza bazei de 6 cm. Aria bazei cilindrului este egală cu ... π cm^2.
(5p) **6.** Utilizând diagrama din *Figura 1*, completați tabelul de mai jos:

x	-1	0	2	5
y	1	...	...	...

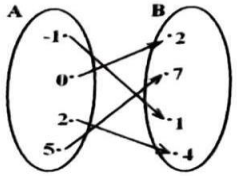


Figura 1

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ de vârf V și bază ABC.
(5p) **2.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y \vdots 3\}$. Determinați numerele naturale a știind că mulțimea $A \cap B$ are 20 de elemente.
(5p) **3.** Răspunzând la toate cele 100 de întrebări ale unui test, un elev a obținut 340 de puncte. Pentru un răspuns corect s-au acordat 5 puncte, iar pentru un răspuns incorect s-au scăzut 3 puncte. Determinați numărul răspunsurilor corecte date de elev.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 2$.
(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.
(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre axa Oy și reprezentarea grafică a funcției considerate.
(5p) **5.** Arătați că $\frac{2x+1}{x-2} + \frac{1-2x}{x+2} + \frac{x^2+16}{x^2-4} = \frac{x+8}{x-2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Cubul din *Figura 2* conține 4 litri de apă. Înălțimea la care se ridică apa în cub este egală cu 8 cm.
(5p) *a)* Arătați că lungimea muchiei cubului este egală cu $10\sqrt{5}$ cm.
(5p) *b)* Calculați aria totală a cubului.
(5p) *c)* Determinați volumul de apă necesar umplerii cubului.

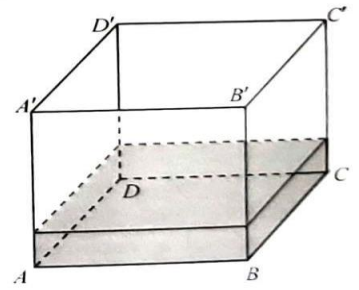


Figura 2

2. *Figura 3* reprezintă schița unui teren format din două dreptunghiuri $AMPD$ și $BCPM$, fiecare având aria de 15 m^2, respectiv 34 m^2. Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci:
(5p) *a)* arătați că lungimea laturii pătratului $ABCD$ este egală cu 7 m.
(5p) *b)* calculați aria triunghiului APB.
(5p) *c)* determinați masa roșiilor recoltate de pe suprafața $MBCP$, știind că masa roșiilor recoltate de pe suprafața $AMPD$ este egală cu 30 kg.

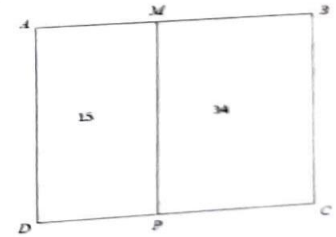


Figura 3

Testul 31

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $312:3-107$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă 20% din x este 20, atunci valoarea numărului x este egală cu ... .

(5p) **3.** Produsul elementelor mulțimii $(-\infty;\sqrt{3})\cap\mathbb{N}$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Perimetrul unui romb este de 12 cm. Lungimea unei laturi a rombului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din *Figura 1* cu toate muchiile congruente. Dacă $AB=6$ cm, atunci aria triunghiului VAC este egală cu ... cm^2.

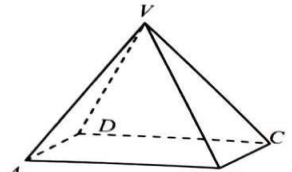


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obținut note cel puțin egale cu 7 reprezintă ... % din numărul elevilor din clasă.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(5p) **2.** Determinați numerele reale pozitive a,b,c știind că media geometrică a numerelor a și b este $3\sqrt{2}$, media geometrică a numerelor b și c este 6, iar media geometrică a numerelor a și c este $2\sqrt{6}$.

(5p) **3.** Dacă elevii unei clase se așează câte doi în bancă, atunci un elev stă singur în bancă, iar două bănci rămân libere. Dacă elevii se așează câte trei în bancă, atunci rămân șase bănci libere. Aflați numărul băncilor din clasă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m+1,2m)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Determinați valorile lui x din intervalul $(-6,6)$, pentru care $\frac{x+2}{3}\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O bucată de brânză în formă de prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale ABC și $A'B'C'$ se taie după un plan MNP paralel cu planul ABC, $M\in(AA')$, $N\in(BB')$ și $P\in(CC')$. Dacă $AB=AM=MA'=6$ cm, atunci:

(5p) ***a)*** calculați volumul feliei de brânză $ABCMNP$;

(5p) ***b)*** determinați distanța de la punctul C la dreapta MN;

(5p) ***c)*** determinați valoarea sinusului unghiului dintre planele (ABP) și (ABC).

2. *Figura 2* reprezintă schița unui teren format din două parcele, dreptunghiul $ADCE$ și triunghiul dreptunghic BEC. Parcela $ADCE$ este cultivată cu grâu, iar parcela BEC este cultivată cu secară. Dacă $AB=10$ cm, $AD=8$ cm și $DC=4$ cm, atunci:

(5p) ***a)*** Determinați perimetrul patrulaterului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Calculați cât la sută din aria suprafeței cultivate cu grâu reprezintă aria suprafeței cultivate cu secară.

(5p) ***c)*** Determinați distanța de la punctul B la dreapta AC.

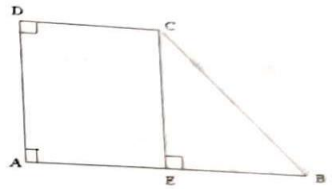


Figura 2

Testul 32

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $3-4\cdot5$ este egal cu ... .

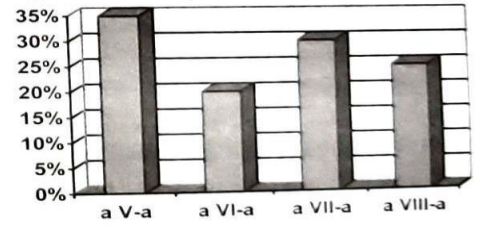
(5p) **2.** Dacă $\frac{x}{5}=\frac{9}{15}$, atunci valoarea numărului x este egală cu ... .

(5p) **3.** Mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\le3\sqrt{5}\right\}$ conține un număr de ... numere naturale.

(5p) **4.** Dacă lungimea unui cerc este egală cu 12π cm, atunci lungimea razei cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Un con circular drept are raza bazei de 3 cm și înălțimea de 4 cm. Volumul conului este egal cu ... π cm^3.

(5p) **6.** Într-o școală gimnazială sunt 300 de elevi, iar repartiția procentuală a elevilor pe clase este reprezentată în diagrama de mai jos. Numărul elevilor din clasa a VI-a este egal cu ... .



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Demonstrați că numărul $(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2$ este natural.

(5p) **3.** În urma unor reduceri de Crăciun, prețul unui televizor se reduce cu 25%. După sărbători, noul preț se mărește cu 20%, ajungând ca televizorul să coste 3600 lei. Aflați prețul inițial al televizorului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m+1,-7)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+2}=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;+1\}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu lungimea de 25 cm și lățimea de 10 cm, este plin cu apă. Cu o parte din apa din acvariu se umple un vas în formă de cub cu muchia de 10 cm.

(5p) *a)* Calculați volumul cubului.

(5p) *b)* Dacă înălțimea acvariului este egală cu 30 cm, atunci calculați aria laterală a acvariului.

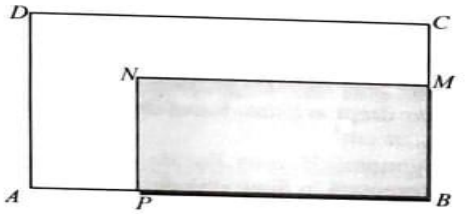
(5p) *c)* Determinați cu câți centimetri scade nivelul apei din acvariu.

2. Dreptunghiul $ABCD$ din figura de mai jos reprezintă o coală albă de hârtie. Un elev pictează cu albastru suprafața dreptunghiului $MNPB$. Se știe că $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, $NP = 6$ cm, $MN = 10$ cm.

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței pictate cu albastru.

(5p) *b)* Verificați dacă aria suprafeței albe rămase este mai mare decât aria suprafeței albastre.

(5p) *c)* Determinați lungimea segmentului $[DN]$.



Testul 33

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-459 + 309 : 3$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Un obiect costă 30 lei. Prețul obiectului după o scumpire cu 20% este egal cu ... lei.

(5p) **3.** Soluția număr natural a ecuației $x^2 = 9$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Diagonala unui dreptunghi cu lungimea de 8 cm și lățimea $\frac{1}{4}$ din lungime, este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 1* cu $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $DD' = 10$ cm. Aria triunghiului $D'DB$ este egală cu ... cm^2.

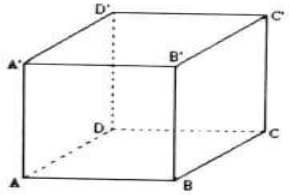


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute în urma măsurării înălțimilor elevilor dintr-o clasă. Numărul elevilor din clasă este egal cu ... .

Înălțimea (cm)	158	163	167	170	175
Număr elevi	3	6	4	6	5

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$.

(5p) **2.** Suma a două numere naturale este cel mult egală cu 48. Aflați cele două numere știind că împărțind pe cel mai mare la cel mai mic, obținem câtul 5 și restul 6.

(5p) **3.** Calculați media geometrică a numerelor $x = \sqrt{12} + 2\sqrt{2}$ și $y = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m+1)x + 5$. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(-2, m+6)$ este situat pe graficul funcției f.

5. Se consideră expresia $E(x) = (x+3) \cdot \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

(5p) *a)* Arătați că $E(x) = \frac{x-2}{x-3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

(5p) *b)* Determinați $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât $E(x) \in \mathbb{Z}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O cutie de carton are formă de prismă dreaptă cu baza pătrat, $ABCDEFGH$, cu fețele laterale verzi și bazele albe. Aria suprafeței vopsite în verde este de $324\sqrt{6}$ m^2 și lungimea muchiei bazei este de $9\sqrt{2}$ m. Cutia este umplută cu pachete în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 m, 4 m și 6 m.

(5p) *a)* Determinați lungimea muchiei laterale a cutiei.

(5p) *b)* Verificați dacă în cutie pot încăpea 34 pachete. ($\sqrt{3} = 1,73$)

(5p) *c)* Determinați distanța de la punctul F la dreapta AC.

2. *Figura 2* reprezintă schița unei grădini împărțită în trei parcele egale: triunghiurile ADE, DEC, BCE sunt dreptunghice isoscele, iar $DC = 4$ m. Grădina este împrejmuită cu un gard.

(5p) *a)* Calculați lungimea gardului.

(5p) *b)* Pe suprafața grădinii se plantează butași de trandafiri. Știind că pe 1 m^2 se pot planta 9 butași de trandafiri, aflați numărul butașilor necesari pentru a acoperi suprafața grădinii.

(5p) *c)* Grădina este străbătută de o alee care pornește din punctul A și se termină în punctul C. Calculați lungimea segmentului $[AC]$.

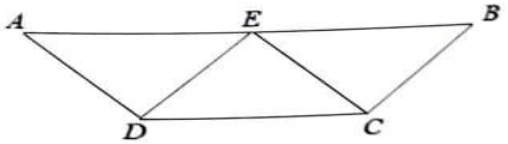


Figura 2

Testul 34

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $7-\frac{1}{2}:\frac{1}{24}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numărul numerelor întregi negative din intervalul $[-4,2)$ este egal cu ... .

(5p) **3.** Probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ acesta să fie divizibil cu 3 este egală cu ... .

(5p) **4.** Latura unui pătrat echivalent cu un romb de diagonale 9 cm și 8 cm este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Un cilindru circular drept are secțiunea axială un pătrat cu latura de 6 cm. Aria laterală a cilindrului este egală cu ... π cm^2.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile înregistrate în decursul unei săptămâni. Temperatura medie a săptămânii este egală cu ... .

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	27°	28°	29°	27°	24°	26°	28°

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Stabiliți dacă numărul $A=\sqrt{2013^2-2\cdot 2013+1}$ este număr natural.

(5p) **3.** Un depozit are de trimis pachete cu semințe care, în funcție de masa lor sunt de două tipuri: de 20 g și de 25 g. Determinați câte pachete din fiecare tip conține un colet care are masa de 3 kg, iar numărul total de pachete cu semințe este 128.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați numărul real a pentru care punctul $M(a,a+1)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6}=\frac{x-3}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un pavilion are forma unui paralelipiped dreptunghic. Dimensiunile bazei acestuia sunt de 14 m, respectiv 8 m, iar înălțimea este de 4 m.

(5p) *a)* Determinați volumul pavilionului.

(5p) *b)* Pavilionul este folosit pentru una din probele pe echipe ale unui concurs de cercetași. Spațiul necesar fiecărei echipe, pentru a-și desfășura proba, este direct proporțional cu numărul membrilor echipei. Știind ca la concurs participă 3 echipe care au 3, 5 și respectiv 6 membri și este folosită întreaga suprafață a bazei pavilionului, determinați spațiul alocat fiecărei echipe.

(5p) *c)* Pentru confecționarea pavilionului s-a folosit prelată. Câți m^2 de prelată au fost necesari pentru confecționarea pavilionului? Se consideră că pavilionul are 4 pereți și este acoperit.

(5p) **2.** Un parc are forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 157 m, respectiv 1000 m. În centrul dreptunghiului se află o zonă, de forma unui disc, plantată cu flori, care reprezintă 20% din întreaga suprafață a parcului.

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței plantate cu flori.

(5p) *b)* Determinați raza discului ce reprezintă suprafața plantată cu flori. ($\pi=3,14$).

(5p) *c)* Cât costă împrejmuirea parcului și a rondului de flori știind că 1 metru de gard costă 14,5 lei? ($\pi=3,14$).

Testul 35

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(\frac{5}{9}+\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{27}{6}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $x=2$ și $y+z=3$, atunci valoarea expresiei $x\cdot y+x\cdot z$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Probabilitatea ca, aruncând la întâmplare un zar, pe fața de sus să apară un număr par este egală cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi dreptunghic isoscel are mediana dusă din vârful unghiului drept egală cu 4 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din *Figura 1* cu toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VA și BC este egală cu ... °.

(5p) **6.** Media aritmetică ponderată a numerelor 6, 7, 8 având ponderile 2, 3, 4 este egală cu ... .

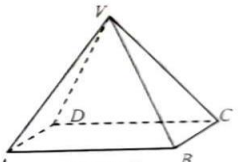


Figura 1

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un con circular drept a cărui secțiune axială este triunghi dreptunghic ABC.

(5p) **2.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2\le 3x+1\le 8\}$. Determinați $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Suma a trei numere naturale este 120. Știind că suma dintre primul și al treilea număr este de 4 ori mai mare decât al doilea număr și că unul dintre numere este egal cu cel mai mic pătrat perfect de două cifre, determinați numerele.

4. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$.

(5p) *a)* Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței delimitată de graficele celor două funcții și axa Oy.

(5p) **5.** Arătați că $(2x+1)(1-2x)+(2x+3)^2-3(4x-1)=13$, pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un calorifer are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L=2,5$ m, $l=30$ cm și $h=0,8$ m.

(5p) *a)* Determinați aria totală a paralelipipedului dreptunghic.

(5p) *b)* Calculați volumul caloriferului, exprimat în litri.

(5p) *c)* Prețul unui calorifer este de 420 lei. Pentru achiziționarea unui număr mai mare de 5 calorifere, la fiecare calorifer ce depășește această cantitate se acordă o reducere de 10%. Care este prețul plătit de un client pentru cumpărarea a 9 calorifere?

2. Fie dreptunghiul $ABCD$, cu dimensiunile $AB = 60\,\text{cm}$ și $BC = 40\,\text{cm}$. Se consideră un punct $M \in [AB]$ astfel încât $MB = x$ $(x < 60)$.

(5p) ***a)*** Determinați lungimea segmentului $[AM]$, știind ca aria trapezului $DCBM$ este de 5 ori mai mare decât aria triunghiului AMD.

(5p) ***b)*** Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, determinați cât la sută din perimetrul dreptunghiului $ABCD$ reprezintă perimetrul triunghiului AMD.

(5p) ***c)*** Dacă lungimile segmentelor $[AM]$ și $[MB]$ sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$, calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului $DCBM$.

Testul 36

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $0,01 : 0,001$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 30 elevi, din care 18 fete. Probabilitatea ca la o oră să fie evaluat un băiat este egală cu ... .

(5p) **4.** Lungimea unui cerc este egală cu 90π cm. Raza cercului are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** O sferă are diametrul de lungime 12 cm. Volumul sferei este egal cu ... π cm^3.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test. Numărul elevilor care au obținut note cel mult egale cu 6 este egal cu ... .

Nota	4	5	6	7	9	10
Număr elevi	2	3	8	4	4	3

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $SMNPQ$ de vârf S și bază $MNPQ$.

(5p) **2.** Aflați trei numere știind că primele două sunt direct proporționale cu 2 și 5, ultimele două sunt invers proporționale cu 3 și 4, iar diferența dintre ultimul și primul este egală cu 14.

(5p) **3.** Verificați dacă numărul $a = \sqrt{16} - |2 - \sqrt{5}| - |3 - \sqrt{5}|$ este număr natural.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b - 6$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) ***a)*** Determinați numerele reale a și b știind că punctele $A(0,-2)$ și $B(1,2)$ aparțin graficului funcției f.

(5p) ***b)*** Pentru $a = 4$ și $b = 4$ reprezentați grafic funcția f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(a,b) = a^2 + 9b^2 - 4a + 6b + 5$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați numerele a și b știind că $E(a,b) = 0$.

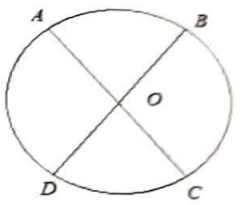
Subiectul III **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Un vas are forma unui tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de 6 cm.
a) Determinați aria totală a tetraedrului.

(5p) ***b)*** Calculați valoarea sinusului unghiului dintre planele (ABD) și (ACD).

(5p) ***c)*** O picătură de apă aflată în mijlocul P al muchiei $[AD]$ se prelinge pe suprafața laterală a vasului până ajunge în punctul T de pe muchia $[AB]$. Determinați lungimea segmentului $[PT]$.

2. Figura alăturată reprezintă schița unui roți speciale de bicicletă.



(5p) ***a)*** Dacă lungimea roții este de 8π cm, atunci determinați lungimea spiței AC.

(5p) ***b)*** Dacă spițele AC și BD formează un unghi cu măsura de $120°$, determinați aria suprafeței triunghiului AOB.

(5p) ***c)*** Bicicleta se deplasează pe o pistă cu lungimea de 800 m. Aflați câte rotații complete face roata pentru a parcurge pista. ($\pi = 3,14$)

Testul 37

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $22^{2011} : 22^{2010} + 3^4 - 103$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $a = 5$ și $b + c - d = 9$, atunci $a(b + c) - ad$ este egal cu ... .

(5p) **3.** După simplificare, fracția $\frac{42}{56}$ este egală cu fracția ireductibilă ... .

(5p) **4.** Latura triunghiului echilateral înscris în cercul cu raza de 6 cm este egală cu ... .

(5p) **5.** Un con circular drept are aria bazei de 25π cm^2 și înălțimea de 12 cm. Volumul conului este egal cu ... π cm^3.

(5p) **6.** În tabelul următor sunt reprezentate notele obținute la teza la matematică de elevii clasei a VIII-a. Media clasei este egală cu ... .

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	0	2	3	5	6	5	4

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Suma a două numere reale este egală cu 2,(4), iar diferența lor este egală cu 1,2. Determinați cele două numere reale.

(5p) **3.** Determinați numerele reale x, y care verifică egalitatea $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

(5p) ***a)*** Reprezentați grafic funcția f.

(5p) ***b)*** Calculați $f(1) + f(2) + ... + f(50)$.

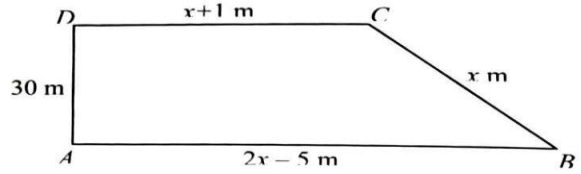
(5p) **5.** Arătați că $\left(x + 3 + \frac{10}{x-3}\right) \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 3x^2 + x - 3} = 1$, pentru orice număr real x, $x \neq 3$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Un parc are forma unui trapez dreptunghic, ca în figura de mai jos.
a) Determinați câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui complet parcul.

(5p) ***b)*** Calculați aria suprafeței parcului.

(5p) *c)* Dacă M și N sunt mijloacele laturilor BC și AD, calculați perimetrul trapezului $ABMN$.



2. O bucată de gheață are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 12 dm, lățimea de 10 dm și înălțimea de 8 dm. Bucata de gheață se introduce într-un bazin care are forma unui cub cu latura de 12 dm. Jumătate din bazin este plin cu apă.

(5p) *a)* Calculați volumul bucății de gheață.

(5p) *b)* Calculați volumul bazinului.

(5p) *c)* Precizați, argumentând răspunsul, dacă atunci când bucata de gheață se introduce în bazin și se topește, acesta poate prelua sau nu întreaga cantitate de apă.

Testul 38

Subiectul I **(30 de puncte)**

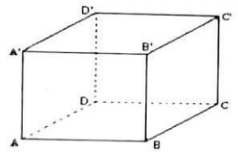
(5p) **1.** Rezultatul calculului $10-10:10$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numărul elementelor mulțimii $[-4,3)\cap\mathbb{Z}$ este egal cu ... .

(5p) **3.** După o reducere cu 25% prețul unui produs este de 300 lei. Prețul inițial al produsului a fost egal cu ... lei.

(5p) **4.** În paralelogramul $ABCD$, măsura unghiului A este de $42°30'$. Măsura unghiului B este egală cu ... .

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului $AD'C$ este egală cu ...°.



(5p) **6.** În luna ianuarie s-au înregistrat următoarele temperaturi:

Nr. zile	2	1	5	8	4	2	9
Temperatura	-16°	-10°	-14°	-1°	-5°	-1°	2°

Temperatura medie a lunii ianuarie este egală cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cilindru circular drept.

(5p) **2.** Într-o clasă sunt 33 de elevi. Numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieților. Determinați numărul băieților și numărul fetelor din clasă.

(5p) **3.** Arătați că numărul $n=5\sqrt{11}-5\sqrt{3}+\sqrt{75}-4\sqrt{11}-\frac{11}{\sqrt{11}}$ este număr întreg.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(a-2)x+3$.

(5p) *a)* Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1,4)$ aparține graficului funcției f.

(5p) *b)* Pentru $a=3$ determinați distanța de la originea sistemului de axe xOy la graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $(x+3)^3-16x-48=(x-1)(x+3)(x+7)$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. O grădină în formă de trapez isoscel $ABCD$ cu bazele AB și CD are baza mare $AB=18$ dam și înălțimea $CE=8$ dam. Se știe că $5\cdot CE=4\cdot CB$.

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței terenului $ABCD$.

(5p) *b)* Determinați cât la sută din aria terenului $ABCD$ reprezintă aria parcelei BEC.

(5p) *c)* Determinați prețul împrejmuirii terenului $ABCD$ dacă un metru liniar de gard costă 15,5 lei ?

2. Într-o sală de sport trebuie instalate 12 calorifere confecționate din tablă. Un calorifer are dimensiunile $L=2$ m, $l=20$ cm și $h=0{,}70$ m.

(5p) *a)* Determinați aria suprafeței tablei necesară pentru confecționarea caloriferelor.

(5p) *b)* Calculați volumul unui calorifer, exprimat în litri.

(5p) *c)* Dacă un metru pătrat de tablă costă 35 lei, ce sumă este necesară pentru realizarea caloriferelor ?

Testul 39

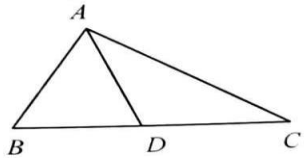
Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10^2-2\cdot10-2^4\cdot5$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Valoarea de adevăr a propoziției: „2012 este pătrat perfect" este egală cu ... .

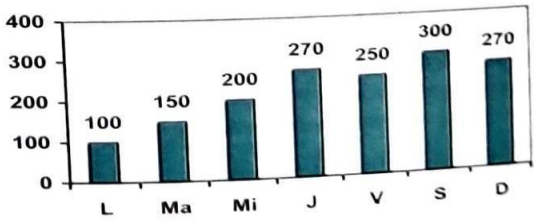
(5p) **3.** 4 muncitori termină o lucrare în 12 zile. 6 muncitori termină aceeași lucrare în ... zile.

(5p) **4.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar $[AD]$ este mediană. Dacă $AD=5$ cm și $AC=8$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu ... cm^2.



(5p) **5.** O sferă are aria de 36π cm^2. Raza sferei este egală cu ... cm.

(5p) **6.** În diagrama de mai jos este reprezentat numărul vizitatorilor unui muzeu într-o săptămână. Media vizitatorilor în acea săptămână este egală cu ... .



Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele pătrate.

(5p) **2.** Fie $A = n \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} \cdot \sqrt{5^2 \cdot 4^2}$. Determinați cel mai mic număr natural nenul n, astfel încât A să fie pătrat perfect.

(5p) **3.** Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 12, 15 și respectiv 18 dă resturile 9, 12 și respectiv 15.

4. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = bx + a - 3$.

(5p) *a)* Determinați a și b astfel încât punctul $A(2,3)$ să fie punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

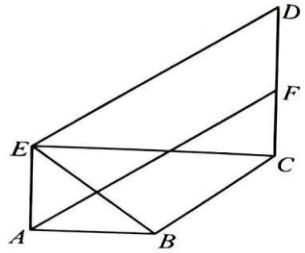
(5p) *b)* Pentru $a = 0$ și $b = 3$, reprezentați grafic funcția g într-un sistem de axe xOy.

(5p) **5.** Determinați numerele reale x și y știind că $4x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y + 5 = 0$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un teren agricol se compune din trei parcele în formă de triunghi dreptunghic isoscel ABE, BEC și CDE, așezate ca în figura alăturată. Se cunoaște că

$m(\sphericalangle BAE) = m(\sphericalangle EBC) = m(\sphericalangle ECD) = 90°$.



(5p) *a)* Știind că aria parcelei ABE este de 200 m^2, calculați aria întregului teren.

(5p) *b)* Câți metri de gard sunt necesari pentru împrejmuirea terenului ?

(5p) *c)* Dacă F este mijlocul lui $[DC]$, atunci stabiliți natura patrulaterului $AFDE$.

2. Firma „La Izvor" îmbuteliază apa plată în bidoane de câte 5 litri. Bidoanele sunt introduse câte două în cutii de carton în forma de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 50 cm, 25 cm și înălțimea de 60 cm. Cutiile se transportă cu un camion care are spațiul de transport în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 8$ m, $l = 2{,}5$ m și $h = 3$m.

(5p) *a)* Calculați volumul spațiului de transport al camionului.

(5p) *b)* Determinați numărul maxim de cutii ce pot fi transportate de camion.

(5p) *c)* Calculați volumul apei, exprimat în litri, ce poate fi transportată de camion.

Testul 40

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(208 : 2 - 2^2) : 5^2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor 16 și 36 este egală cu ... .

(5p) **3.** Salariul unui muncitor este de 2000 lei. După o mărire cu 15% salariul său va fi ... lei.

(5p) **4.** Un hexagon regulat $ABCDEF$ cu $AD = 16$ cm are lungimea diagonalei AC egală cu ... cm.

(5p) **5.** Aria pătratului cu diagonala de $5\sqrt{2}$ cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** În luna iulie s-au înregistrat intr-o săptămână următoarele temperaturi:

Data	12	13	14	15	16	17	18
Temperatura	27°C	25°C	29°C	30°C	32°C	33°C	27°C

Temperatura medie a săptămânii este egală cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Un agricultor a cules într-o zi 59 kg de pere si 67 kg de mere. După ce le așează în lădițe rămân 3 kg de pere și 4 kg de mere. Aflați câte kg de fructe sunt într-o lădiță dacă lădițele au aceeași capacitate.

(5p) **3.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 5| \le 7\}$ si $B = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; -1 \le \frac{4x+8}{4} < 7\right\}$.

Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

(5p) *a)* Determinați a și b știind că $A(2\,;7)$ și $B(-1\,;-8)$ aparțin graficului funcției f.

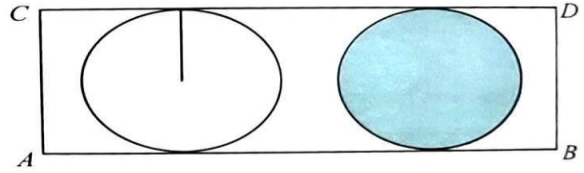
(5p) *b)* Calculați aria triunghiului format de graficul funcției și axele Ox și Oy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = (2x+1)^2 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2) - 3x^2 + 15$.

Arătați că $E(x) = x^2 + 6x + 11$, pentru orice număr real x.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Figura de mai jos reprezintă două ronduri cu flori situate pe o platformă dreptunghiulară acoperită cu iarbă. Dimensiunile platformei sunt $L = 12$ m și $l = 4$ m.

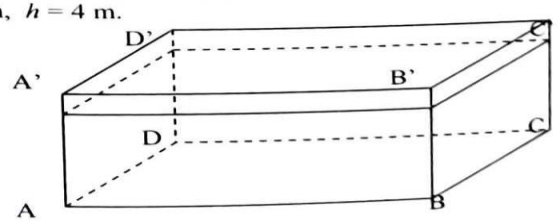


(5p) *a)* Calculați aria platformei dreptunghiulare.

(5p) *b)* Aflați aria suprafeței acoperită cu iarbă știind că rondurile sunt acoperite de lalele și panseluțe. ($\pi = 3{,}14$)

(5p) *c)* Fiecare rond conține 240 de fire de lalele și 180 de fire de panseluțe. Dacă un fir de lalea costă 3,5 lei, iar un fir de panseluță costă 2,5 lei, aflați cât au costat florile din cele două ronduri.

2. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $L = 6$ m, $l = 5$ m, $h = 4$ m.



(5p) *a)* Calculați volumul bazinului.

(5p) *b)* În bazin sunt 90000 litri de apă. Determinați înălțimea apei din bazin.

(5p) *c)* În bazin sunt 90000 litri de apă. Golirea bazinului se face prin 4 robinete, fiecare cu un debit de 10 litri pe secundă. În cât timp se golește bazinul?

Testul 41

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $32 \cdot 10 - 30 \cdot 10$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $p\%$ din 20 este 4, atunci p este al cu ... .

(5p) **3.** Între numerele 17 şi 56 sunt ... numere naturale.

(5p) **4.** Rombul $ABCD$ are diagonala de 6 cm şi, respectiv, de 8 cm. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$. Măsura unghiului dintre dreptele AD şi BC este egală cu ...°.

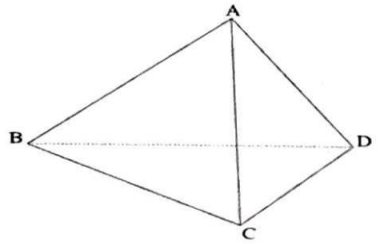


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obţinute de elevii unei clase la un test.

Număr elevi	2	5	6	4	3	2	1
Nota	4	5	6	7	8	9	10

Numărul elevilor din clasă care au obţinut note mai mari decât 6 este egal cu ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă dreaptă cu baza hexagon regulat $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$.

(5p) **2.** Calculaţi media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei $x^2 + 5x + 6 = 0$.

(5p) **3.** Un drumeţ a parcurs un traseu montan în trei zile. În prima zi a parcurs 25% din drum, în a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest şi în a treia zi ultimii 12 de kilometri din traseu. Determinaţi lungimea traseului parcurs de drumeţ în cele 3 zile.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$.

(5p) ***a)*** Calculaţi $f(-2)$.

(5p) ***b)*** Reprezentaţi grafic funcţia f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, unde x este număr real, $x \neq -1$ şi $x \neq 1$. Arătaţi că $E(x) = x$, pentru orice x număr real, $x \neq -1$ şi $x \neq 1$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. *Figura 2* reprezintă schiţa unei grădini formate din pătratul $ABCD$ şi un semicerc de diametru $[BC]$, $BC = 6$ m. Punctul M este mijlocul semicercului $\widehat{BC}$.

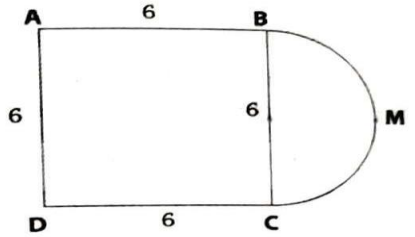


Figura 2

(5p) ***a)*** Grădina este împrejmuită cu un gard. Calculaţi lungimea gardului.

(5p) ***b)*** Arătaţi că distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $3\sqrt{2}$ m.

(5p) ***c)*** Arătaţi că aria suprafeţei grădinii este mai mică decât 51 m^2 ($3{,}14 < \pi < 3{,}15$).

2. Dintr-un bucată de lemn în formă de cub cu latura de 30 cm se sculptează un cilindru circular drept de volum maxim, ca în *Figura 3*.

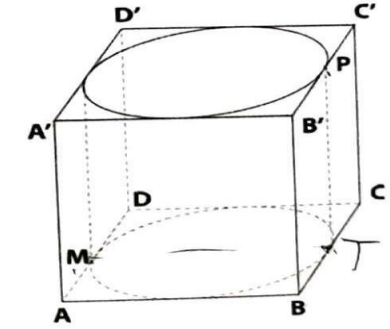


Figura 3

(5p) ***a)*** Arătaţi că raza bazei cilindrului este egală cu 15 cm.

(5p) ***b)*** Determinaţi volumul lemnului eliminat din bucata în formă de cub pentru a obţine cilindrul circular drept.

(5p) ***c)*** O furnică se deplasează pe suprafaţa laterală a cilindrului din punctul M în punctul P, pe drumul cel mai scurt, M şi P fiind mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[B'C']$. Determinaţi lungimea traseului.

Testul 42

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $11-9,7$ este egal cu ... .

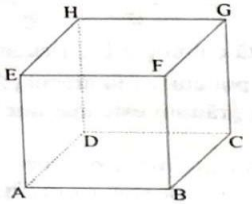
(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{30}=\frac{b}{15}=\frac{2}{5}$, atunci valoarea expresiei $a\cdot b-7$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Media aritmetică a numerelor întregi din intervalul $[-3, 4)$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Pătratul $ABCD$ are suma diagonalelor de $12\sqrt{2}$ cm. Latura AB are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat cubul $ABCDEFGH$. Măsura unghiului dintre dreptele EB și AH este egală cu ... °.

Figura 1



(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția a cinci elevi după numărul de cărți citite în vacanța de vară.

Prenume elev	Alin	Dana	Mihnea	Dina	Rada
Număr cărți citite	7	11	10	8	12

Numărul cărților citite de cei 5 elevi este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(5p) **2.** Fie ecuația $x^2-ax+20=0$. Dacă 4 este o soluție a ecuației, atunci calculați media geometrică a soluțiilor ecuației date.

(5p) **3.** Într-o cantină sunt 30 de mese cu 3 picioare sau 4 picioare. Dacă în total sunt 108 picioare, atunci determinați numărul meselor cu 4 picioare din cantină.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+2$.

(5p) *a)* Arătați că $f(a)-f(2a)=2a$.

(5p) *b)* Determinați măsura unghiului AOB, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de coordonate xOy.

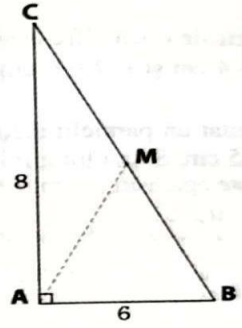
(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x-3}{x^2-x-6}\cdot\frac{4x+8}{x-1}+3\right)\cdot\frac{x-1}{6x+2}$, unde x este număr real, $x\neq-2$, $x\neq3$, $x\neq-\frac{1}{3}$, $x\neq1$.

Arătați că $E(x)=\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2,-\frac{1}{3},1,3\right\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

(5p) **1.** *Figura 2* reprezintă schița unei hărți turistice. În punctele A, B și C sunt cabane, iar în punctul M se află un stejar secular. Se știe că triunghiul ABC este dreptunghic în A, $AC=8$ km, $AB=6$ km și $M\in(BC)$, $\frac{CM}{BM}=\frac{1}{2}$.

Figura 2



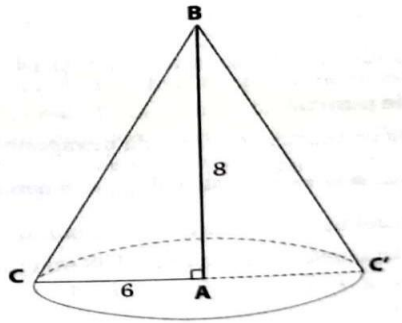
(5p) *a)* Calculați perimetrul triunghiului ABC.

(5p) *b)* Două grupuri de turiști pornesc în același timp din A către M pe traseele A-B-M și A-C-M, mergând cu aceeași viteză. Precizați care grup ajunge primul la stejarul secular.

(5p) *c)* Determinați lungimea segmentului $[AM]$.

2. Conul circular drept din *Figura 3* s-a obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ABC în jurul catetei $[AB]$, $m(\sphericalangle BAC)=90°$. Se cunosc $AB=8$ cm și $AC=6$ cm.

Figura 3



(5p) *a)* Arătați că distanța de la C la BC' este egală cu $\frac{48}{5}$ cm.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a conului circular drept.

(5p) *c)* Verificați dacă volumul conului circular drept este mai mare decât 0,3 litri (se consideră cunoscut că $3,14<\pi<3,15$).

Testul 43

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $1,2-1,(1)$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}$, atunci x reprezintă ... % din y.

(5p) **3.** Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu ... .

(5p) **4.** Rombul $ABCD$ are $AO = 4$ cm și $BO = 6$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ în care $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm și $BF = 5$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului dreptunghic $ABCDEFGH$ este egală cu ... cm.

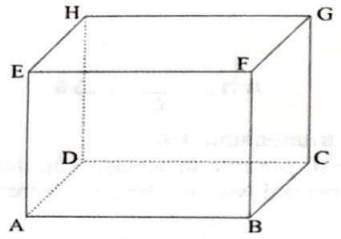


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este reprezentată repartiția pe vârste a unui grup de elevi.

Vârsta	11 ani	12 ani	13 ani	14 ani	15 ani
Număr elevi	4	5	8	3	2

Numărul elevilor cu vârsta cuprinsă între 11 ani și 14 ani este egal cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$.

(5p) **2.** Arătați că numărul $a=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ este soluție a ecuației $4x^2-8x+1=0$.

(5p) **3.** Determinați numărul natural de forma $\overline{abc}$, știind că numărul $\overline{bc}$ este de 9 ori mai mare decât cifra a, iar numărul $\overline{bca}$ este cu 108 mai mic decât $\overline{abc}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

(5p) ***a)*** Verificați dacă $\frac{f(2)+f(4)}{2}=f\left(\frac{2+4}{2}\right)$.

(5p) ***b)*** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+\frac{3x-2}{x+2}\right]:\frac{2x}{x+2}$, unde x este număr real, $x\neq -2$, $x\neq 0$. Arătați că $E(x)=\frac{2x}{x+2}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$, $x\neq 0$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. *Figura 2* reprezintă schița unui teren agricol, format din două parcele în formă de pătrat, $ABCD$ și $BGFE$. Se știe că $AB = 6$ dam și $GF = x$ dam.

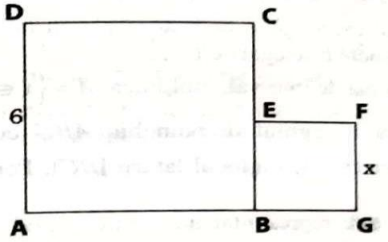


Figura 2

(5p) ***a)*** Arătați că perimetrul terenului este egal cu $2(12+x)$ dam.

(5p) ***b)*** Determinați măsura unghiului $\sphericalangle DBF$.

(5p) ***c)*** Determinați valoarea numărului real x, știind că aria pătratului $BGFE$ este egală cu $\frac{1}{4}$ din aria terenului agricol.

2. *Figura 3* reprezintă o jucărie în formă de trunchi de con circular drept. Se știe că $AB = 12$ cm, $CD = 6$ cm și $m(\sphericalangle DAB) = 60°$.

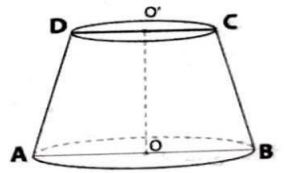


Figura 3

(5p) ***a)*** Arătați că înălțimea trunchiului de con circular drept este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

(5p) ***b)*** Calculați distanța de la punctul A la dreapta BC.

(5p) ***c)*** Precizați numărul cutiuțelor de vopsea necesare pentru vopsirea suprafeței laterale a trunchiului de con circular, știind că o cutiuță conține 12 ml de vopsea, iar pentru vopsirea unui centimetru pătrat sunt necesari 4 ml vopsea.

Testul 44

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2\sqrt{12}-4\sqrt{3}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte este egală cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 3\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$, $BC=8$ cm și punctul M mijlocul laturii $[BC]$. Perimetrul triunghiului AMB este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În *Figura 1* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB=3$ cm, $BC=4$ cm și $AA'=5$ cm, atunci lungimea diagonalei BD' este egală cu ... cm.

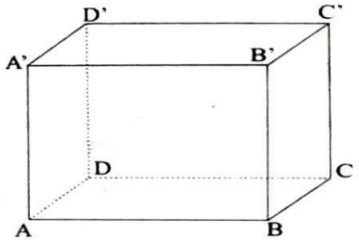


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este dat numărul de elevi dintr-o clasă care participă la trei cercuri pe obiecte.

Disciplina	Matematică	Biologie	Fizică
Număr elevi	14	7	5

Numărul elevilor care participă la cercul de biologie este egal cu ... % din numărul elevilor care participă la cercul de matematică.

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Suma a două numere este egală cu 45. Determinați cele două numere știind că împărțind unul dintre numere la celălalt se obține câtul 5 și restul 3.

(5p) **3.** Se dau mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x=3n+2, n\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,y=2p+3,\ p\in\mathbb{N}\}$. Arătați că $2015\in A\cap B$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-x$.

(5p) ***a)*** Verificați dacă $f(2)\cdot f(3)=f(2\cdot 3)$.

(5p) ***b)*** Determinați numărul real a știind că punctul $M(a^2,2a)$ se află pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Se consideră $E(x)=(2x-3)^2+2(5-2x)(2x-3)+(5-2x)^2$, unde x este număr real. Arătați că $E(x)=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. *Figura 2* reprezintă schița unei plăci de gresie. Cercul de centru O, $\{O\}=AC\cap BD$, este tangent laturilor rombului $ABCD$ în punctele P, Q, S, T. Suprafața discului este colorată cu roșu, iar restul plăcii de gresie este colorat cu galben. Dacă $AB=BD=12$ cm, atunci:

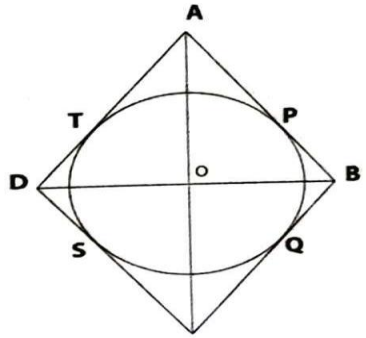


Figura 2

(5p) ***a)*** arătați că raza cercului este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

(5p) ***b)*** comparați aria suprafeței colorată cu roșu cu aria suprafeței colorată cu galben.

(5p) ***c)*** arătați că punctele P, O, S sunt coliniare.

2. În *Figura 3* este reprezentat schematic o piesă dintr-un puzzle 3D în formă de prismă dreaptă cu bazele hexagoane regulate $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Aria unei baze este egală cu $54\sqrt{3}$ cm și $AB=AA'$.

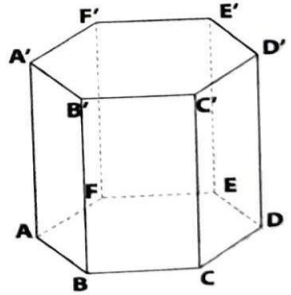


Figura 3

(5p) ***a)*** Verificați dacă înălțimea prismei este egală cu 6 cm.

(5p) ***b)*** Determinați măsura unghiului dintre dreptele AC' și DF'.

(5p) ***c)*** Calculați distanța de la punctul A la planul (CDD').

Testul 45

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $3+24:3$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Fie mulțimile $A=\{-1;0;1;2\}$ și $B=\{-2;0;1;3\}$. Mulțimea $A\cap B$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Se aruncă un zar. Probabilitatea ca pe fața de sus a zarului să apară un număr mai mic sau egal cu 3 este egală cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit de 34°. Măsura celuilalt unghi ascuțit este egală cu ...°.

(5p) **5.** Un con circular drept are raza de 6 cm și volumul 48π cm^3. Înălțimea conului are lungimea de ... cm.

(5p) **6.** Temperaturile înregistrate la o stație meteo în decursul primelor 10 zile din luna iulie sunt prezentate în tabelul următor:

Ziua	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura	28°C	30°C	31°C	33°C	34°C	35°C	34°C	36°C	35°C	34°C

Media temperaturilor înregistrate în cele 10 zile este egală cu ...°C.

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un tetraedru regulat $ABCD$.

(5p) **2.** Într-o clasă sunt 30 elevi. 20% din numărul elevilor sunt fete. Determinați numărul băieților din clasă.

(5p) **3.** Un elev citește în prima zi a vacanței o pagină de carte. Apoi citește în fiecare zi un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. După câte zile a citit elevul 127 pagini?

4. Fie expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+2(x-3)(x+3)-x(4x+3)+17$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(5p) ***a)*** Arătați că $E(x)=x^2+3x-1$, oricare ar fi x număr real.

(5p) ***b)*** Rezolvați ecuația $E(x)=3$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) **5.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Stabiliți dacă punctele $A(1;2)$ și $B(-1;-5)$ aparțin graficului funcției f.

Subiectul III **(30 de puncte)**

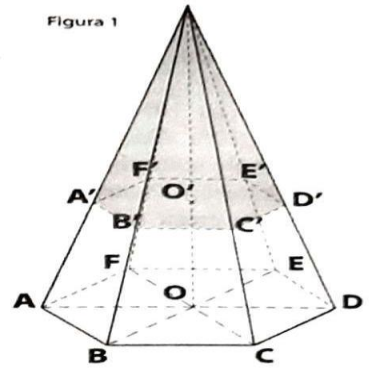
1. Un obiect ornamental, confecționat din sticlă, are forma unei piramide hexagonale regulate, ca în figura de mai jos. Porțiunea haşurată este de culoare roșie, iar restul (inclusiv baza) este din sticlă transparentă. Se cunosc $AB=12$ cm și înălțimea $VO=18$ cm. Planul $(A'B'C')$ este paralel cu planul bazei piramidei.

(5p) ***a)*** Calculați perimetrul hexagonului $ABCDEF$.

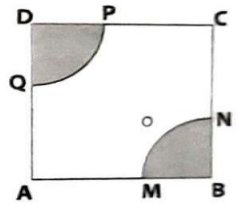
(5p) ***b)*** Calculați aria laterală a piramidei $VABCDEF$.

(5p) ***c)*** Știind că aria porțiunii haşurate este egală cu jumătate din aria laterală a piramidei $VABCDEF$, arătați că lungimea segmentului $[VO']$ este mai mare decât 12,5 cm.

Figura 1



2. Figura alăturată reprezintă schița unei curți având forma pătratului $ABCD$ de latură $AB=40$ m. Curtea este împărțită în trei zone: cele două zone haşurate sunt identice și sunt acoperite cu gazon iar restul curții este acoperit cu pietriș. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA), iar $\overset{\frown}{MN}$ și $\overset{\frown}{PQ}$ sunt arce de cerc. (Cercurile au centrele în B, respectiv D).



(5p) ***a)*** Calculați aria curții $ABCD$.

(5p) ***b)*** Calculați lungimea arcului $\overset{\frown}{MN}$.

(5p) ***c)*** Arătați că aria zonei acoperite cu pietriș este mai mare decât aria zonei acoperite cu gazon. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14<\pi<3{,}15$.

Testul 46

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $456:4-14$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Opusul numărului $-\frac{1}{3}$ este numărul ... .

(5p) **3.** Dacă $x=-2$, atunci $x+3$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Un cub are muchia de 4 cm. Diagonala cubului are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu latura de 8 cm. Aria laterală a conului este egală cu ... π cm^2.

(5p) **6.** La alegerile pentru funcția de președinte al Consiliului Elevilor, s-au înregistrat următoarele rezultate:

Candidatul	Alex	Mihai	Raluca	Andra	Paul	Diana
Nr. voturi	68	89	93	67	51	78

Funcția de președinte a fost câștigată de ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, având bazele ABC și $A'B'C'$.

(5p) **2.** Un produs se scumpește cu 10% din prețul inițial. După un timp, produsul se scumpește din nou cu 10% din noul preț, ajungând astfel să coste 121 lei. Determinați prețul inițial al produsului.

(5p) **3.** Un test conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se primesc 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 5 puncte. Ana a obținut 170 de puncte. Determinați numărul răspunsurilor corecte date de Ana.

4. Se consideră ecuația $2x^2 + ax + b = 0$, unde a și b sunt numere naturale.

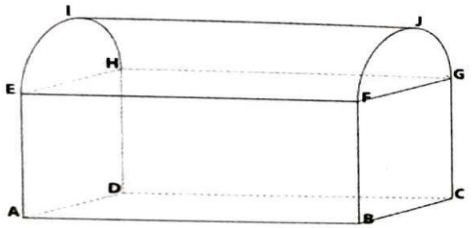
(5p) ***a)*** Pentru $a = 3$ și $b = 1$, rezolvați ecuația în mulțimea numerelor reale.

(5p) ***b)*** Arătați că $E(x) = 3$, unde $E(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1} - x + 2$, unde $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(5p) **5.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2ax - 1$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a știind că punctul $A(1;3)$ aparține graficului funcției f.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un grup de copii se joacă „Comoara piraților". Ceea ce trebuie ei să găsească, „Comoara", se află într-un cufăr care are forma schițată în figura următoare. $ABCDEFGH$ este paralalipiped dreptunghic, iar arcele $\overset{\frown}{FG}$ și $\overset{\frown}{EH}$ sunt semicercuri. Se cunosc $AB = 50$ cm, $BC = 30$ cm și $AE = 20$ cm.

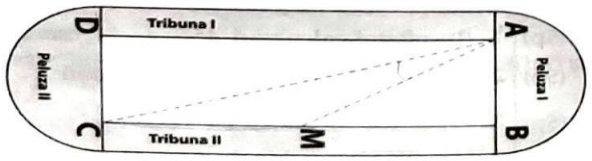


(5p) ***a)*** Calculați aria dreptunghiului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Aflați volumul cufărului.

(5p) ***c)*** Stabiliți dacă în cufăr încape un băț lung de 62 cm. (grosimea bățului este neglijabilă)

2. Orașul București va găzdui pe Stadionul „Național Arena" patru meciuri de la Campionatul European de fotbal din 2020. „Național Arena" are forma din figura următoare și este format din terenul de joc, două tribune dreptunghiulare și două peluze circulare. Dimensiunile aproximative ale terenului de joc $L = 120$ m și $l = 90$ m. Lățimea unei tribune este de 15 m.



(5p) ***a)*** Determinați aria suprafeței terenului de joc.

(5p) ***b)*** Stabiliți dacă aria suprafeței celor două peluze este mai mare decât aria terenului de joc.

(5p) ***c)*** Punctul M este mijlocul laturii (BC). Arătați că sinusul unghiului MAC este egal cu $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Testul 47

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $36 - 4 : 4$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Un elev sosește la școală la ora 7 și 36 de minute. Până la ora 8.00 mai are de așteptat ... minute.

(5p) **3.** Calculând 10% din 40 se obține ... .

(5p) **4.** Un romb are diagonalele de 6 cm, respectiv 5 cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Aria sferei cu raza de 8 dm este egală cu ... π dm^2.

(5p) **6.** În tabelul următor este prezentată prezența zilnică a celor 30 de elevi ai clasei a VIII-a A din Școala „Ion Agârbiceanu", pe parcursul unei săptămâni:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
Nr. elevi prezenți	27	29	30	28	26

Conform tabelului, vineri au fost ... elevi absenți.

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Sebi cumpără de la un magazin cu produse de papetărie 5 caiete și 2 pixuri. Un caiet costă 3,4 lei, iar un pix costă 5,5 lei. Ce rest primește de la o bancnotă de 50 lei?

(5p) **3.** Tudor are de două ori mai mulți ani decât fratele lui Paul. Paul și Mihai sunt gemeni. Dacă cei trei copii au împreună 16 ani, câți ani are Tudor?

4. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right) : \dfrac{2}{x}$, unde $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1, 0\}$.

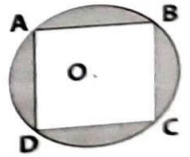
(5p) ***a)*** Rezolvați ecuația $x^2 + 4x + 3 = 0$.

(5p) ***b)*** Arătați că $E(x) = x$.

(5p) **5.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are ordonata egală cu triplul abscisei.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Geamul de la mansarda unei case este schițat în figura alăturată. $ABCD$ este un pătrat înscris în cercul de centru O și rază $[OA]$. Zona hașurată reprezintă sticlă mată, iar cea nehașurată, sticlă transparentă. Se știe că $AB = 12$ dm.



(5p) ***a)*** Calculați aria pătratului $ABCD$.

(5p) ***b)*** Arătați că raza cercului este egală cu $6\sqrt{2}$ dm.

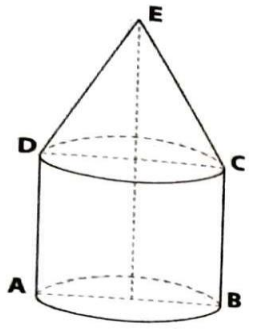
(5p) ***c)*** Arătați că aria zonei hașurate este mai mică decât aria zonei nehașurate. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

2. Un sculptor trebuie să realizeze un monument având forma din figura alăturată. Monumentul este format din două părți, un cilindru circular drept peste care se găsește un con circular drept. Monumentul are înălțimea de 5 m, iar secțiunea axială a conului este un triunghi echilateral cu înălțimea de 3 m.

(5p) *a)* Calculați volumul monumentului.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței laterale a monumentului.

(5p) *c)* Stabiliți dacă 70 kg de material sunt suficiente pentru construcție, știind că densitatea materialului din care este realizat monumentul este $\rho = 2,5 \text{kg}/\text{m}^3$. (Se consideră cunoscută formula densității, $\rho = \frac{m}{V}$ □i $3,14 < \pi < 3,15$)



Testul 48

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{121} - \sqrt{9} - \sqrt{81}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă numărul $\overline{2014x}$ este divizibil cu 5, atunci $x \in \{ ... \}$.

(5p) **3.** Inversul numărului -0,25 este egal cu ... .

(5p) **4.** Aria laterală a unui cilindru circular drept cu înălțimea de 5 m și raza de 10 m, este egală cu ... m^2.

(5p) **5.** Suplementul unghiului cu măsura de 147° este egal cu ... °.

(5p) **6.** Temperaturile medii înregistrate în prima săptămână a lunii ianuarie sunt reprezentate în tabelul următor:

Data	1 ian.	2 ian.	3 ian.	4 ian.	5 ian.	6 ian.	7 ian.
Temp. °C	-7°C	-4°C	-1°C	0°C	-3°C	-4,5°C	-2°C

Cea mai călduroasă zi a fost ... .

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un con circular drept având secțiunea axială un triunghi dreptunghic isoscel VAB.

(5p) **2.** Rezolvați ecuația $\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{13}{6}, x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

(5p) **3.** Determinați numerele reale x și y, știind că $|x-2y| + (x-2)^2 = 0$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Arătați că numărul $a = f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$ este natural.

(5p) **5.** Arătați că numărul $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 4) + 4$ este pătrat perfect, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Un teren de atletism are forma din figura de mai jos. Lungimea dreptunghiului este de 100 m, iar lungimea unui semicerc este de 33π m.

(5p) *a)* Calculați aria dreptunghiului.

(5p) *b)* Determinați aria terenului.

(5p) *c)* Arătați că, alergând în jurul terenului, se poate organiza proba de 400 de m (fără a fi nevoie de a înconjura complet terenul).



2. Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 20 dm și 12 dm, iar înălțimea de 100 dm este plin cu apă. Se golește toată apa într-un vas ce are formă de cilindru circular drept cu raza bazei de 2 m și lungimea înălțimii exprimată printr-un număr natural nenul de metri.

(5p) *a)* Determinați volumul paralelipipedului dreptunghic, exprimat în litri.

(5p) *b)* Calculați aria bazei cilindrului circular drept.

(5p) *c)* Calculați înălțimea minimă a vasului cilindric astfel încât întrega cantitate de apă din paralelipiped să încapă în vasul cilindric.

Testul 49

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $38 : 2 - 18$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Calculând 25% din 24 se obține ... .

(5p) **3.** Dintre numerele $\frac{7}{5}$ și $\frac{7}{6}$ mai mare este numărul ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are perimetrul de 24 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Volumul unei sfere este egal cu $\frac{9\pi}{2}$ cm^3. Raza sferei este egală cu ... cm.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt reprezentate notele obținute de Ionel la obiectul matematică în anul 2014. Media aritmetică a notelor este egală cu ... .

Luna	Septembrie	Octombrie	Noiembrie	Decembrie
Nota	8	9	10	9

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ de vârf V și de bază ABC.

(5p) **2.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x + 9| < 12\}$. Enumerați elementele mulțimii A.

(5p) **3.** Înmulțind vârsta unui elev de gimnaziu cu 13 și scăzând-o din pătratul respectivei vârste, obținem rezultatul -12. Determinați vârsta elevului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax-2$, $a\in\mathbb{R}$..

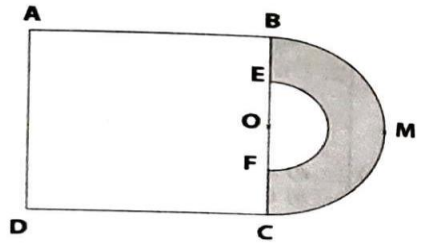
(5p) *a)* Determinați numărul real a, știind că punctul $A(-3;7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

(5p) *b)* Pentru $a=-3$, reprezentați grafic funcția f.

(5p) **5.** Arătați $n=\left(\frac{\sqrt{8}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{7}\right)-\sqrt{2}$ este număr natural.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În figura alăturată este reprezentat un bazin format din două zone: o zonă destinată adulților (pătratul $ABCD$) și o zonă destinată copiilor (interiorul semicercului mic $\overset{\frown}{EF}$, cu centrul în O). Porțiunea hașurată este destinată șezlongurilor ($\overset{\frown}{BC}$ este un semicerc cu centrul în O). Se știe că $AB=40$ m și $BE=OE$.

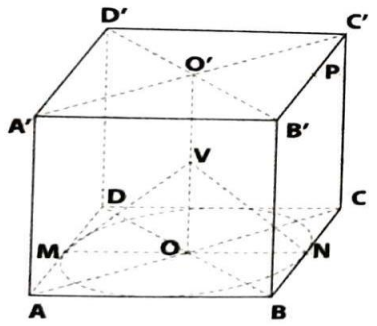


(5p) *a)* Arătați că $AF=50$ m.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței $ADCF$.

(5p) *c)* Arătați că aria suprafeței ocupate de șezlonguri este mai mică decât 473 m^2. $(3{,}14<\pi<3{,}15)$

2. Dintr-o bucată de lemn în formă de cub cu latura de 8 dm se cioplește o piesă în formă de con circular drept, ca în figura alăturată. ($V\in(OO')$). Se știe că $VO'=2$ dm.



(5p) *a)* Calculați lungimea generatoarei conului.

(5p) *b)* Calculați aria totală a conului.

(5p) *c)* Arătați că volumul lemnului care se pierde prin cioplire este mai mic decât 412 dm^3. $(3{,}14<\pi<3{,}15)$

Testul 50

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2\cdot2-2:2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Soluția ecuației $2x+3x=10$ este egală cu ... .

(5p) **3.** Un exemplu de număr pătrat perfect mai mic decât 15,78 este numărul ... .

(5p) **4.** Suma măsurilor a două unghiuri alăturate ale unui paralelogram este egală cu ...°.

(5p) **5.** Aria totală a unui cilindru circular drept cu raza de 10 cm este 300π cm^2. Înălțimea cilindrului este egală cu ... cm.

(5p) **6.** În tabelul următor este prezentat cursul de schimb leu-euro pe perioada a cinci zile.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
1 € =	4,4733 Lei	4,4722 Lei	4,4830 Lei	4,4842 Lei	4,4743 Lei

Conform tabelului, valoarea maximă a cursului leu-euro s-a înregistrat în ziua de ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Rezolvați ecuația $x(x-1)-2x=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) **3.** După ce a parcurs o treime din drum, un turist constată că dacă mai parcurge 2 km ajunge la jumătatea drumului. Determinați lungimea drumului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+6$.

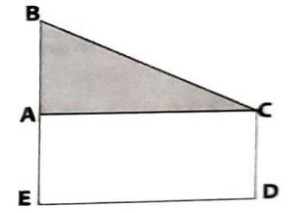
(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care $A(m;-5)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2+4$ este pătrat perfect.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura alăturată reprezintă schița unei camere $ACDE$, de formă dreptunghiulară cu lungimea $AC=3\sqrt{3}$ m și lățimea $AE=3$ m. Zona hașurată reprezintă o terasă și are forma unui triunghi dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90°$. Se știe că $AB=AE$.

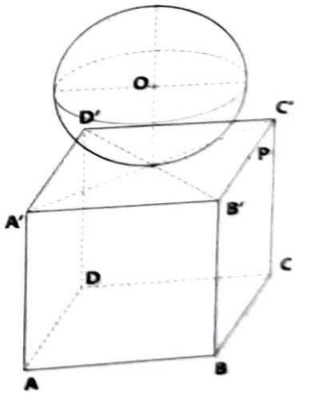


(5p) *a)* Calculați lungimea laturii $[BC]$.

(5p) *b)* Arătați că unghiul BCE are măsura egală cu 60°.

(5p) *c)* Se pune parchet în zona $ACDE$. Arătați că 16 m^2 de parchet sunt suficienți pentru a acoperi întreaga suprafață $ACDE$. $(1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74)$

2. La o competiție sportivă fiecare dintre cei 11 jucători ai echipei de fotbal câștigătoare a primit câte un trofeu care are forma celui din figura alăturată: o sferă așezată pe o prismă dreaptă cu bazele pătrate. Înălțimea trofeului este de 40 cm, iar raza sferei este o treime din înalțimea prismei și este egală cu latura bazei prismei.



(5p) *a)* Calculați raza sferei.

(5p) *b)* Calculați volumul unui astfel de trofeu.

(5p) *c)* Determinați cât au costat trofeele primite de echipa câștigătoare, știind că pentru realizarea unui astfel de trofeu s-au folosit 400 g material, iar un kilogram de material costă 32,5 lei.

Soluţii

Capitolul 1. Aritmetică/Algebră

Tema 1.1 Numere naturale. Operaţii cu numere naturale

Soluţii – Partea I

1. 300008. **2.** 170. **3.** 345000. **4.** *b*. **5.** 26. **6.** 11. **7.** 45. **8.** *O*, *B*, *A*, *C*. **9.** 28305. **10.** 709. **11.** 3536. **12.** 7. **13.** 3. **14.** 180. **15.** 336. **16.** 4. **17.** 2. **18.** 3. **19.** 2. **20.** 7. **21.** 6. **22.** *a*. **23.** *y*. **24.** 44. **25.** 168. **26.** 10. **27.** 5. **28.** 4. **29.** 1. **30.** 68.

Soluţii – Partea a II-a

31. ***a)*** 14; ***b)*** 70; ***c)*** 112. **32.** ***a)*** 88; ***b)*** 46; ***c)*** 182; ***d)*** 113; ***e)*** 54; ***f)*** 155. **33.** ***a)*** 448; ***b)*** 704; ***c)*** 379; ***d)*** 304. **34.** ***a)*** 858; ***b)*** 112746; ***c)*** 5831; ***d)*** 201100. **35.** ***a)*** 106; ***b)*** 15; ***c)*** 8; ***d)*** 992. **36.** ***a)*** 2; ***b)*** 100; ***c)*** 13; ***d)*** 2028. **37.** $a+c=2a+b+2c-(a+b+c)=16$, $5a+2b+5c=2(2a+b+2c)+(a+c)=162$; 2592. **38.** ***a)*** 180; ***b)*** 121. **39.** ***a)*** 28; ***b)*** 84; ***c)*** 42; ***d)*** 98. **40.** 21, 32. **41.** 34, 45; **42.** 3, 4, 5. **43.** ***a)***12965; ***b)*** 860; ***c)*** 40044; ***d)*** 2681; ***e)*** 4194; ***f)*** 5410. **44.** ***a)*** 668; ***b)*** 1006; ***c)*** 55; ***d)*** 10. **45.** ***a)*** 2003^2; ***b)*** 1006^2; ***c)*** 315^2. **46.** ***a)*** 21; ***b)***10. **47.** Ultima cifră poate fi 2 sau 7, deci numerele nu pot fi pătrate perfecte. **48.** 13 şi 91. **49.** 16 şi 144. **50.** 11 şi 143. **51.** ***a)*** $x \in \{78, 79, 80, 81, 82, 83\}$. **52.** 75, 39, 7. **53.** 37, 95, 3. **54.** 217, 145. **55.** ***a)*** 8, 16, 24, 32, 40, 48; ***b)*** 17, 34, 51, 68, 85, 102; ***c)*** 40 + 41+42+...+47 = 348. **56.** 215, 15, 2. **57.** 195, 85, 17. **58.** 146, 7. **59.** 331, 3. **60.** 169, 20.

Tema 1.2 Numere întregi

Soluţii – Partea I

1. 2. **2.** natural. **3.** –14. **4.** –4. **5.** 1. **6.** –42. **7.** 6. **8.** –12. **9.** –27. **10.** 10. **11.** 4. **12.** 3^7. **13.** –6. **14.** 2. **15.** –6. **16.** –10. **17.** –2. **18.** –3. **19.** 0. **20.** 6.

Soluţii – Partea a II-a

21. $a=-12$, $b=-4$. **22.** 37. **23.** 79. **24.** 1. **25.** –5. **26.** $(-2)^{30}<(-3)^{20}$. **27.** 23. **28.** 39. **29.** $(-3)^{21}>(-2)^{35}$. **30.** –11. **31.** –78. **32.** ***a)*** 32; ***b)*** 112. **33.** ***a)*** 18; ***b)*** –9. **34.** $n\in\{-4,3\}$. **35.** 13. **36.** 9. **37.** 5. **38.** (0;7), (1;2). **39.** –10. **40.** Dacă ecuaţia dată ar avea vreo soluţie, atunci $3x+2$ ar fi divizor al lui 9. Cum $D_9=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$, singurul posibilitate este ca $3x+2=-1$, pentru care $x=-1$. În acest caz, ar rezulta $5y+3=-9$, de unde $y=-\frac{12}{5}\notin\mathbb{Z}$, absurd.

Tema 1.3 Divizibilitate

Soluţii – Partea I

1. 1, 2, 3, 4, 6, 12. **2.** 0, 7, 14, 21, 28. **3.** 243. **4.** 30. **5.** 300. **6.** 9. **7.** 248. **8.** 54. **9.** 267. **10.** $\{2,6,10,30\}$. **11.** 1313. **12.** 14. **13.** 0. **14.** 3 sau 7. **15.** $2^2\cdot3\cdot5\cdot7$. **16.** 74. **17.** 12^{36}. **18.** *A*. **19.** 120. **20.** 2.

Soluţii – Partea a II-a

21. ***a)*** $A=\{0,3,6,15\}$; ***b)*** $B=\{-12,-6,-4,-2,0,6\}$; ***c)*** $C=\{1\}$. **22.** ***a)*** (9,72), (72,9); ***b)*** (24,132); (72,12); ***c)*** (12,240), (48,60), (60,48), (240,12). **23.** ***a)*** $3^n\cdot23\vdots23$; ***b)*** $5^n\cdot66\vdots11$; ***c)*** $36^n\cdot2001\vdots2001$. **24.** 791. **25.** 57. **26.** 14. **27.** ***a)*** $3\cdot(2+2^3+...+2^{2005})\vdots3$. ***b)*** $43\cdot(6+6^4+...+6^{19})\vdots43$. **28.** ***a)*** 1512, 3516, 4512, 6516, 7512, 9516; ***b)*** 252; ***c)*** 1215, 3210, 4215, 6210, 7215, 9210. **29.** ***a)*** ***b)*** Se arată că ultima cifră este 0; ***c)*** $125\cdot(10^n-1)$ se divide cu 5 şi cu 9. **30.** ***a)*** $(2x+3y)\vdots5$, $(10x+15y)\vdots5\Rightarrow(12x+18y)\vdots5$; ***b)*** Deoarece $(2x+y)\vdots3$ şi $(3x+6y)\vdots3\Rightarrow(5x+7y)\vdots3$. **31.** $a\mid a\cdot b+c\Rightarrow a\mid c$; $a\mid a\cdot c+b\Rightarrow a\mid b$. Deci $a\mid11b$ şi $a\mid11c$, de unde rezultă că $a\mid\overline{bc}+\overline{cb}$. **32.** $1001\cdot\overline{abc}\vdots13$. **33.** Se foloseşte relaţia $3A+B=7\cdot(3a+7b+5c)$. **34.** Deoarece $5B-2A=1$, dacă *d* este un divizor comun al numerelor *A* şi *B*, atunci rezultă $d\mid1$, deci $(A,B)=1$. **35.** (1,9); (5,6). **36.** $\overline{abc}=386$. **37.** Deoarece $\overline{abc}$ şi $a+b+c$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 9, rezultă că $9\mid a+b+c-5$, deci $a+b+c\in\{5,14,23\}$. Din a doua condiţie rezultă $a+b+c=14$. Cum 7 divide $\overline{acb}+2$, folosind proprietăţile divizibilităţii, rezultă $a+2c\in\{12,19\}$. Obţinem soluţiile 149, 275, 338, 464. **38.** Numerele $n+3$ şi $n+6$ au parităţi diferite, deci produsul lor este par. **39.** Avem $b+c=1$ şi $a+d=7$ sau $b+c=2$ şi $a+d=14$. Se obţin soluţiile: 2015, 2105, 7010, 7100, 9025, 9115, 9205. **40.** Restul împărţirii unui număr natural la 5 poate fi 0, 1, 2, 3 sau 4. Având şase numere, două dau acelaşi rest la împărţirea cu 5, deci diferenţa lor este divizibilă cu 5. **41.** Din relaţia dată, rezultă că *n* este par. Fie $n=2k$; rezultă $m=3k+2$. Atunci $A=(m-2)(n+2)=3k\cdot(2k+2)=6k(k+1)$, care este divizibil cu 6. **42.** ***a)*** Restul împărţirii unui număr natural la 10 este ultima cifră a acestuia. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, deci $M=\{0,1,4,5,6,9\}$. ***b)*** Ultima cifră a lui 3^{48} este 1, iar ultima cifră a lui 2^{25} este 2, deci ultima cifră a lui *A* este ultima cifră a numărului x^2+2y^2. Ţinând cont de punctul anterior, $u(A)=0$ dacă şi numai dacă $u(x^2)=u(y^2)=0$, iar $u(A)=5$ dacă şi numai dacă $u(x^2)=5$ şi $u(y^2)=0$. În concluzie, dacă *A* este divizibil cu 5, atunci *x* şi *y* sunt divizibile cu 5. **43.** 105. **44.** ***a)*** Notând $s_k=1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$, avem $M_k=\{s_1,s_2,...,s_k\}$. Deoarece $s_{10}=55$, rezultă că $55\in S_{10}-S_9$. ***b)*** Nu, deoarece din $s_t=2012$, rezultă $t(t+1)=4012$, iar 4024 nu este produs de numere consecutive, întrucât $62\cdot63<4024<63\cdot64$. ***c)*** 804. **45.** ***a)*** Dacă $d\mid3n+7$ şi $d\mid2n+5$, atunci $d\mid3(2n+5)-2(3n+7)$, deci $d\mid1$, adică $d=1$. Ca urmare, fracţia este ireductibilă. Analog la ***c)*** şi ***e)***. ***b)*** Fracţia se simplifică prin 2, întrucât la numărător şi numitor se află numere pare. ***d)*** Fracţia se simplifică prin 11. **46.** Dacă *n* este numărul sportivilor, atunci $n-6$ se divide cu 10, 14 şi 15, deci şi cu c.m.m.m.c. al lor, adică cu 210. Rezultă că $n=210k+6$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Cel mai mic număr de sportivi este 216. **47.** Dacă $8n+5$ dă restul 5 la împărţirea cu 50, atunci $50\mid8n$, deci $50\mid n$. Ultimele două cifre ale lui *n* pot fi 00, 25, 50 sau 75. Apoi, din faptul că $13n+8$ dă restul 13 la împărţirea cu 80, rezultă că $80\mid13n-5$, deci *n* este impar. De aici rezultă:
- fie $n=100k+25$, pentru care $13n-5=1300k+320$, care se divide cu 80 pentru valori pare ale lui *k*;
- fie $n=100k+75$, pentru care $13n-5=1300k+970$, care nu este divizibil cu 4, deci nici cu 80.

Ca urmare, numărul format de ultimele două cifre ale lui *n* este 25. **48.** 24 minute. **49.** 120. **50.** 4 ore şi 12 minute.

Tema 1.4 Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale

Soluţii – Partea I

1. $\frac{67}{60}$. **2.** 3,8(5). **3.** 6,5. **4.** – 3,41 şi – 3,42. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** 8. **7.** 10. **8.** $\{0,1,2\}$. **9.** $\frac{5}{7}$. **10.** 28. **11.** $\frac{7}{3}$. **12.** $A\cap\mathbb{N}=\{5,7\}$; $A\cap\mathbb{Q}=A$. **13.** $a<b<c<d$. **14.** 18,4(3). **15.** $\frac{863}{100}$. **16.** $\frac{5}{6}$. **17.** 23,75. **18.** 35,438. **19.** 4000. **20.** $\frac{143}{140}$.

21. ***a)*** Dacă $n \in A$, atunci $2 < n < 7$, deci $A = \{3,4,5,6\}$. Apoi, dacă $n \in B$, din $\frac{3}{2} > \frac{5}{n} > \frac{2}{3}$, avem $\frac{2}{3} < \frac{n}{5} < \frac{3}{2}$, de unde $\frac{10}{3} < n < \frac{15}{2}$, deci $B = \{4,5,6,7\}$. **22.** ***a)*** $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; ***b)*** Înmulțind cu $\frac{1}{2}$ egalitatea anterioară, avem: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, deci $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ **(1)**. Folosind același „truc", avem $\frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$, deci $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$. **23.** $A = 1$ (se obține simplificând fracțiile); grupând, avem $B = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2005} + \frac{2004}{2005}\right) = 2005$. Rezultă de aici că $A - B = 2004$, $A^B = 1$, $(B - 2004)^{A+1} = 25$. **24.** ***a)*** $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)}$.

b) Se folosește identitatea demonstrată la punctul ***a)*** pentru $k = 1,2,\ldots,99$; după sumare avem $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \frac{99 \cdot 151}{10100}$.

25. ***a)*** $-\frac{7}{4}$; ***b)*** -2. **26.** $B = \left\{3; 5,(1); -2,3; \frac{8}{5}; -4,3(2)\right\}$, $C = \left\{3; 5,(1); 2,3; \frac{8}{5}; 4,3(2)\right\}$. **27.** ***a)*** Avem $\frac{6}{-5-1} = -1 \in \mathbb{Z}$, deci $-5 \in A$ și $\frac{3 \cdot (-5) + 8}{-5 + 6} = -7 \in \mathbb{Z}$, deci $-5 \in B$. ***b)*** Dacă $x \in A$, atunci $x - 1 \mid 6$, deci $x - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Rezultă $A = \{-5,-2,-1,0,2,3,4,7\}$. Dacă $x \in B$, atunci $x + 6 \mid 3x + 18$ și, cum $x + 6 \mid 3x + 18$, rezultă $x + 6 \mid 10$, adică $x + 6 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. De aici se obține că $B = \{-16,-11,-8,-7,-5,-4,-1,4\}$. Ca urmare, $A \cap B = \{-5,-1,4\}$. **28.** $A = -2^{79}$, $B = -4 \cdot 3^n$. **29.** ***a)*** $a = \frac{13}{27}$, $b = 15$; ***b)*** $x = 54$. **30.** 1728 lei. **31.** ***a)*** Cei 624 km parcurși a treia zi reprezintă $\frac{3}{5}$ din distanța rămasă de parcurs după prima zi; astfel, în ultimele două zile a parcurs $624 : \frac{3}{5} = 1040$ km, iar a doua zi a parcurs $1040 - 624 = 416$ km. ***b)*** Notând cu d distanța totală, avem $\frac{13}{20}d = 1040$, de unde $d = 1600$ km. **32.** ***a)*** Cei 27 de lei cheltuiți a treia zi reprezintă 60% din suma de bani rămasă după prima zi. Notând această sumă cu s, rezultă $60\% \cdot s = 27$, de unde $s = 45$ lei. A doua zi a cheltuit 18 lei. ***b)*** Dacă x este suma inițială, în prima zi a cheltuit $\frac{2}{3}x + 15$ lei și a rămas cu $\frac{1}{3}x - 15 = 45$ lei. Rezultă $x = 180$ lei. **33.** Suma primelor două numere este $2 \cdot 5 = 10$, a următoarelor trei este $3 \cdot 25 = 75$, iar a ultimelor 5 este $125 \cdot 5 = 625$. Suma celor zece numere este 710, iar media lor aritmetică este 71. **34.** 248 km. **35.** 60, 80, 100. **36.** ***a)*** Notând cu x suprafața de arat, se obține că în prima zi a arat $\frac{3x}{7}$, a doua zi $\frac{5x}{14}$, a treia zi $\frac{x}{14}$ și în ultima zi $\frac{x}{7}$. ***a)*** $x = 350000\ \text{m}^2 = 35$ ha. ***b)*** 15 ha, 12,5 ha, 2,5 ha, 5 ha. **37.** 18,5 și 15. **38.** ***a)*** 375 lei; ***b)*** 1000 lei; ***c)*** Cu 50%. **39.** $x = 37,5$. **40.** $l = 3,84$ cm, $L = 6,34$ cm, $A = 24,3456\ \text{cm}^2$.

Tema 1.5 Rapoarte. Proporții. Procente. Probabilități

1. $\frac{1}{4}$. **2.** 62. **3.** $\frac{1}{8}$. **4.** $\frac{1}{8}$. **5.** 1,5. **6.** 65%. **7.** 2000 lei. **8.** 16,(6)%. **9.** 13. **10.** 125. **11.** 752. **12.** 1177. **13.** 0,3. **14.** 0,1. **15.** 0,5. **16.** $\frac{1}{16}$. **17.** 0,4. **18.** $\frac{11}{15}$. **19.** $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$. **20.** 9. **21.** 19. **22.** $\frac{2}{9}$. **23.** $\frac{10}{7}$. **24.** 3,5. **25.** 10,8.

26. 9. **27.** 4256, 5376, 1568. **28.** $m = 20$, $n = 8$. **29.** 60. **30.** 8. **31.** 27,5; 32,5. **32.** 80 kg. **33.** 10 zile. **34.** ***a)*** $m_a = 15$; ***b)*** $m_g = 12$. **35.** ***a)*** $a = 8$; ***b)*** $b = 11$. **36.** ***a)*** 9, 15, 12; ***b)*** 60%. **37.** ***a)*** 1400, 2100 și respectiv 4900 lei; ***b)*** 1512, 2268 și respectiv 5292 lei; ***c)*** 140%. **38.** ***a)*** 350; ***b)*** $p = 15$. **39.** ***a)*** 1000, 1250, 750; ***b)*** 60%. **40.** ***a)*** 2520; ***b)*** 13020; ***c)*** 434. **41.** ***a)*** 36 g; ***b)*** 120 g. **42.** 8%. **43.** ***a)*** 6,6%; ***b)*** 4200; ***c)*** 19,(047619)%. **44.** ***a)*** 24 albe, 6 negre, 90 roșii; ***b)*** 0,75. **45.** ***a)*** 50 cm; ***b)*** 220 km. **46.** ***a)*** 120 t în prima săptămână, 162 t în a doua săptămână; ***b)*** 76,5%. **47.** ***a)*** 300 lei; ***b)*** 44%. **48.** ***a)*** 135 lei; ***b)*** 135 lei. **49.** ***a)*** 6; ***b)*** 10 rațe, 30 curci, 60 găini. **50.** 18 caiete. **51.** 812,5 kg. **52.** 1000 kg. **53.** ***a)*** 3000, 6000, 6000; ***b)*** 40%; ***c)*** 20%. **54.** 450 lei. **55.** 45 lei. **56.** 2000 lei, 2400 lei. **57.** 15, 24, 36. **58.** 25 zile. **59.** 40 zile. **60.** $\frac{1}{3}$.

Tema 1.6 Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali

1. a. **2.** a. **3.** 3. **4.** 3. **5.** -2. **6.** a. **7.** $9\sqrt{2}$. **8.** $3\sqrt{3}$. **9.** 0. **10.** 12. **11.** 1. **12.** $2\sqrt{3}$. **13.** 60. **14.** $\sqrt{3}$. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 10. **17.** 6. **18.** 7. **19.** $(-1;1)$. **20.** 1,4.

21. ***a)*** $A = (10^n \cdot 2)^2$; ***b)*** $n = 0$. **22.** ***a)*** 16,25,36,49,64,81; ***b)*** $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} = \sqrt{11(a+b)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b$ este pătrat perfect, deci $a + b = 11$. Cea mai mică valoare posibilă pentru $\overline{ab}$ este 29. **23.** ***a)*** $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; ***b)*** $C = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$, $S = 0$; ***c)*** $p = \frac{1}{6}$. **24.** ***b)*** $A = \{4,5,6,7,8\}$, $B = \{1,2,3,4\}$; ***b)*** $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A - B = \{5,6,7,8\}$, $B - A = \{1,2,3\}$. **25.** ***a)*** $(a+b) + c = a + (b+c) = 8\sqrt{3}$; ***b)*** $b - c = 3\sqrt{3}$. **26.** ***a)*** $a \cdot b = 5$, $a + b = 2\sqrt{7}$, deci $a \cdot b < a + b$; ***b)*** $x = \frac{2\sqrt{7}}{5} = \frac{\sqrt{28}}{5} \in \left(\frac{\sqrt{16}}{5}; \frac{\sqrt{36}}{5}\right)$. **27.** ***a)*** $a = 9, b = 8$; ***b)*** $m_a = 8,5$. **28.** ***a)*** $x = 6\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{5}$; ***b)*** $8 < x < 9$; ***c)*** $xy = -6\sqrt{10} = -\sqrt{360}$. Concluzia rezultă din faptul că $18 = \sqrt{324} < \sqrt{360} < \sqrt{361} = 19$. **29.** ***a)*** $a \cdot b = 1$; ***b)*** $a^2 + b^2 = 4$; ***c)*** $\frac{b}{a} - \sqrt{3} = 2 \in \mathbb{N}$. **30.** ***a)*** $x = 5$, $y = 2$; ***b)*** $y < x < x^y < y^x$. **31.** $a = 4\sqrt{2} - 20$, $b = 30 - 3\sqrt{3}$, $3a + 2b = 12\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$. **32.** ***b)*** $\sqrt{10}$. **33.** ***b)*** $A = \{-1,1,2,4\}$, $S = 6$; ***c)*** $B = \{1\}$. **34.** ***a)*** $u(a) = 3 \Rightarrow a$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; ***b)*** $u(5n+3) \in \{3,8\} \Rightarrow 5n + 3$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{5n+3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. **35.** ***a)*** $S = \sqrt{n+1} - 1$; dacă $n = 24 \Rightarrow S = 4$; ***b)*** $n = 624$; ***c)*** $n \in \{2^2 - 1, 3^2 - 1, \ldots, 24^2 - 1\}$. **36.** ***a)*** 1,68 m; ***b)*** $\sqrt{2} = 1,4142\ldots \Rightarrow \sqrt{2} < 1,68$. **37.** 12 m. **38.** ***a)*** 48 lei și 60 lei; ***b)*** Tricoul costă 44,55 lei. deci le ajung banii. **39.** Laturile terenului au $\frac{64}{19}$ m, $\frac{96}{19}$ m și $\frac{144}{19}$ m. Se arată că cea din mijloc este media geometrică a celorlalte două. **40.** 16,5 kg.

Tema 1.7 Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori

1. $x^2 + 6x + 6$. **2.** $4x + 5$. **3.** 0. **4.** $6 - 4\sqrt{3}$. **5.** 1. **6.** 8. **7.** $3 + 2\sqrt{2}$. **8.** $x^4 - 1$. **9.** $x^8 - 256$. **10.** 1. **11.** 2. **12.** a. **13.** 5. **14.** 47. **15.** $2(a - b + c)$. **16.** $3(x^3 + 2x^2 - 4x + 8)$. **17.** $(2x+3)^2$. **18.** $(3x - 4y)^2$. **19.** $(x-1)(x+1)(x^2+1)$. **20.** $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$.

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* Calcul direct. *b)* $E(-3)=1$; *c)* $E(a)=(a+3)^2+1>0$. **22.** 8. **23.** *a)* Calcul direct. *b)* $E(-1)=-15$; *c)* $E(x)+16=(x+2)^2\geq 0$. **24.** *a)* Calcul direct. *b)* 49; *c)* $E(a)=(2a+1)^2\geq 0$, de unde $E_{min}=0$, care se realizează pentru $a=-\frac{1}{2}$. **25.** *a)* $n=111\cdot(a+b+c)=37\cdot 3\cdot(a+b+c)$; *b)* $n^2=37^2\cdot 3^2\cdot(a+b+c)^2=333\cdot 37\cdot(a+b+c)^2$. **26.** *b)* Din *a)*, $(a-b)^2=8\Rightarrow a-b=-2\sqrt{2}$, deoarece $a<b$, deci $a-b<0$. Rezultă atunci că $(a-b+2\sqrt{2})^{100}=0^{100}=0$. **27.** *a)* 3; *b)* 2; *c)* Avem $(x-y)^2=2\Rightarrow x-y=-\sqrt{2}$, deoarece $x<y$, deci $x-y<0$. Rezultă $\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1<0$. **28.** *a)* 1; *b)* $x\cdot y=1\Rightarrow x=\frac{1}{y}=\frac{1}{7+5\sqrt{2}}=\frac{1}{7+\sqrt{50}}<\frac{1}{14}$; *c)* $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=39202\in\mathbb{N}$. **29.** $x=6$. **30.** *a)* $m_g=2\sqrt{3}<4=m_a$; *b)* $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\leq a+b\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\leq 0\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$. **31.** *a)* $\overline{x3}\cdot\overline{x5}+1=(10x+4)^2=\overline{x4}^2$. *b)* $\overline{ab}\in\{11,64,95\}$. **32.** *a)* $a=(3n+1)^2$; *b)* $E_{min}=3$, se obține dacă $x=3$ și $y=-\frac{1}{3}$. **33.** *a)* $p=(y+2)^2+1>0$; *b)* $A_{min}=3$. **34.** *a)* 2; *b)* 4. **35.** *a)* 25, 144; *b)* $n=(2x^2-3x+3)^2$. **36.** *a)* 100; *b)* 75; *c)* 130. **37.** *a)* 25; *b)* $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=13$; *c)* $\frac{11}{6}$. **38.** *a)* 3, 6, 18; *b)* $E=(a+2)^2+2>0$; *c)* $E-11=(a-1)(a+5)$. **39.** *a)* $A=(a+5)^2+1>0$; *b)* $a=-5$, $E_{min}=1$. **40.** *a)* $A=-(2a-3)^2-2<0$; *b)* $a=\frac{3}{2}$, $E_{max}=-2$. **41.** $a+b=\sqrt{3}$. **42.** $a=b=2$. **43.** *a)* Calcul direct; *b)* Din *a)* $\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=0\Rightarrow x=-2,\ y=3$. **44.** *b)* $a=(x+2)^2$. **45.** 30 hm, 32 hm, 59 hm. **46.** $x=3\Rightarrow l=3$ dm, L = 5 dm $\Rightarrow P=16$ dm. **47.** Vlad are 60 lei, Adi are 80 lei. **48.** *a)* 2; *b)* Corina are 9 ani, Raluca are 7 ani. **49.** $x=6$ cm $\Rightarrow P=24$ cm. **50.** *a)* $l=\frac{3a+5}{4}\Rightarrow A=\frac{9a^2+30a+25}{16}$; *b)* $a=9$ dam.

Tema 1.8 Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Soluții – Partea I

1. $\frac{6}{5}$. **2.** -1. **3.** $\{1\}$. **4.** $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. **5.** $\frac{15x^2+5x}{20x^2}$. **6.** $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$. **7.** $3xyz$. **8.** $\frac{x+2}{x-2}$. **9.** $\frac{x+3}{x-3}$. **10.** $\frac{x^2+x+1}{3}$. **11.** $\frac{x+1}{x-3}$. **12.** $\frac{x+3}{x+1}$. **13.** x^2-4. **14.** x. **15.** $-\frac{10x}{3y^4}$. **16.** -1. **17.** $\frac{x-1}{x+1}$. **18.** -1. **19.** 1. **20.** 2.

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. **22.** *a)* 0; *b)* $x=0$. **23.** *a)* $A=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. *b)* $E(x)=6$. **24.** *b)* $x\in\{0,2,3\}$; *c)* $x=3$. **25.** *b)* $|E(x)|=1\Leftrightarrow E(x)=1$ sau $E(x)=-1$. Prima ecuație nu are soluție, iar din a doua rezultă $x=0$. **26.** *b)* $x=1\Rightarrow E(1)=\frac{5}{2}$; *c)* $a=-1$. **27.** *a)* $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;2;3\}$; *b)* $m_g=\frac{2}{9}$. **28.** *b)* $x\in\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; *c)* $S=5350$. **29.** *c)* $x\in\{1;2\}$. **30.** *c)* $x+3$ și $x+4$ sunt numere consecutive, deci produsul lor este par. **31.** *b)* $\frac{1}{n}\cdot E(n)=\frac{2}{n+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\in\{-5;-4;-2;-1\}$, dar $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\varnothing$. *c)* $x\in\{-9,-6,-5,-4,-2;-1\}$. **32.** *b)* $a=-2$. **33.** *b)* $A=\{-1,1,2,4\}$, $S=6$; *c)* $B=\{1\}$. **34.** *c)* $x\in\{-2;0;1\}$. **35.** *b)* $x\in\{-5;-2;-1\}$;

c) $x\in\{-6,-5,-2\}$. **36.** *b)* $x\in(-\infty,-4]\cup(1,\infty)$; *c)* $x\in\{-4,-2\}$. **37.** *b)* $a=-3$; *c)* $x=-6$. **38.** *c)* Fie d este un divizor comun al numerelor $8x+3$ și $5x+2$; atunci d divide $8\cdot(5x+2)-5\cdot(8x+3)=1$. **39.** *a)* $\frac{1}{x-1}$; *d)* $S=2^{41}-1$. **40.** *c)* $a=0$. **41.** *b)* 4; *c)* $x=\frac{2}{3}$. **42.** *b)* $x\in\{1;2\}$; *c)* $x=2$. **43.** *c)* $N=(1+5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+\ldots+(5^{120}+5^{121}+5^{122})=31+31\cdot 5^3+\ldots+31\cdot 5^{120}=31(1+5^3+\ldots+5^{120})$

44. *a)* $\mathbb{R}-\{-2;-1,1\}$; *b)* $F(x)=\frac{1}{x-1}$; *c)* $x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow E(x)=\frac{1}{x-1}>0$. **45.** *b)* $E(x)=\frac{x-3}{3}$; *c)* $p=0$. **46.** *a)* -6; *b)* $E(x)=x(x+1)(x+2)$; *c)* $E(n)=n(n+1)(n+2)$. Produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 6. **47.** *a)* $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci $E(x)$ are sens oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *b)* $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\geq 3\Rightarrow\frac{3}{x^2+4x+7}\leq\frac{3}{3}=1$. Deci $E(x)\leq 1+1=2$ **(1)**. Evident, $\frac{3}{x^2+4x+7}>0\Rightarrow E(x)>1+0=1$ **(2)**. Din **(1)** și **(2)** rezultă că $E(x)\in(1;2]$; *c)* Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\Rightarrow[E(x)]=1$. Dacă $x=-2\Rightarrow[E(x)]=2$. **48.** *a)* $\mathbb{R}$; *c)* Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow[E(x)]=6$. Dacă $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow[E(x)]=7$. **49.** *a)* $p=0$; *b)* $a=(x+4)^2$; *c)* Nu există. **50.** *c)* $x\in\varnothing$.

Tema 1.9 Funcții

Soluții – Partea I

1. 5. **2.** 6. **3.** A. **4.** $\frac{11}{4}$. **5.** 5. **6.** 3. **7.** $(0,-6)$. **8.** $(4,0)$. **9.** 5. **10.** -4. **11.** 1. **12.** $(3,-4)$. **13.** $(-3,7)$. **14.** $(2,1)$. **15.** 35. **16.** -8. **17.** -6. **18.** $m=1$. **19.** $C(0,-8)$. **20.** $(3;0)$.

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* $m=\pm 2$; *b)* $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **22.** $m=3,n=-3$. **23.** *b)* $\sqrt{6}$. **24.** *a)* $a=3,b=1$. **25.** *b)* $(-3;-1)$. **26.** *a)* $(-\infty,-1]$; *b)* $a=-1,b=-1$. **27.** *a)* $\frac{1}{3}$. **28.** *b)* 625. **29.** *a)* $f(\sqrt{2}-1)>f(\sqrt{2})$. **31.** *b)* $(1,-1)$. **32.** *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{3}{2}$. **33.** *a)* $a=-2$. **34.** *b)* $m=20$. **35.** *a)* $(-\infty,1]$; *b)* $f(1)=1\Rightarrow A(1,1)\in G_f$. **36.** *b)* $a=b=1$. **37.** *b)* $a=\pm\frac{11}{4}$. **38.** *b)* $x=\frac{1}{13}$. **39.** *b)* $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **40.** *b)* $\sqrt{5}$. **41.** *b)* $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=4$. **42.** *b)* $C(4,0)$. **43.** *b)* 870. **44.** *b)* $AA'=2\cdot OA=2\sqrt{53}$. **45.** *b)* $\sqrt{5}$. **46.** *b)* $\sqrt{2}$. **47.** *a)* $a=1,b=2$. **48.** *a)* $A\notin G_f$, $B\in G_f$, $C\in G_f$. *b)* $\frac{2}{3}$. **50.** *a)* $a=-2,b=4$; *b)* $2(3+\sqrt{5})$.

Tema 1.10 Ecuații, inecuații, sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, al inecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

Soluții – Partea I

1. $\frac{1}{2}$. **2.** 1. **3.** 13. **4.** 1. **5.** $3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **6.** 4. **7.** -4. **8.** 4. **9.** 5. **10.** -1. **11.** 2. **12.** $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$. **13.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **14.** $\frac{3}{4},1$. **15.** $-\sqrt{13}$. **16.** $\frac{4}{7}$. **17.** 0. **18.** $\{\ldots,-10,-9,-8\}$

19. $\{...,-13,-12,-11\}$. **20.** $\{-3;-2;-1;0;1\}$. **21.** $-\frac{3}{2}$. **22.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$. **23.** 3. **24.** $\mathbb{R}$. **25.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$. **26.** 2. **27.** 0. **28.** (3;2). **29.** (2,4). **30.** (1,-1). **31.** (1,1). **32.** $(\sqrt{2};\sqrt{3})$. **33.** $(2;6)$.

Soluţii – Partea a II-a

34. $x=13$. **35.** $x=\frac{541}{198}=2,7(32)$. **36.** $x\in\{-10;7\}$. **37.** $x=1$. **38.** $x=-\frac{23}{22}$. **39.** $x=-\frac{4}{3}$. **40.** $y\in\{2;4\}$. **41.** $y\in\{-2;3\}$. **42.** $x\in\{-3,3\}$. **43.** *a)* -4, *b)* $-1,-\frac{3}{4}$, *c)* 1. **44.** $a=4$. **45.** 5 m, 4 m. **46.** 1, -2. **47.** *a)* $p\in\{1,2\}$, *b)* $-\frac{5}{3},2$. **48.** $a=2, b=5$. **49.** $(x-1)(x-4)$. **50.** $a=6$. **51.** $x\in\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. **52.** $x\in\{1;2;3\}$. **53.** $x\in\{0;1;2\}$. **54.** $x\in(-1;3)$. **55.** $x\in\{0;1;2;3;4\}$. **56.** $x\in[-3,\infty)$. **57.** $x\in(-\infty;1)$. **58.** $x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **59.** $x=0, y=-1$, $(x+y)^{2013}=-1$. **60.** *a)* (0,2) ; (2,1) ; (4,0); *b)* (–4,4). **61.** $x=\frac{50}{89}$, $y=\frac{80}{89}$, $(5y-8x)^{2012}=0$. **62.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **63.** *a)* S = { (–1, –2) ; (–1,2) ; (1, –2) ; (1,2) }; *b)* (1,2). **64.** 256, 30. **65.** 70, 50. **66.** 700. **67.** 4073 kg. **68.** 25 rafturi, 1260 cărţi. **69.** 5 mese cu 3 picioare (şi 12 cu 4 picioare). **70.** 114, 6. **71.** 24 lăzi mici, 30 lăzi mari. **72.** *a)* 65; *b)* 25. **73.** 32 ani. **74.** Peste 12 ani. **75.** *a)* cu 5 kg; *b)* 245, 180, 175. **76.** *a)* 6 ani; *b)* cu 3 ani.

Capitolul 2. Geometrie

Tema 2.1 Unghiuri. Triunghiuri

Soluţii – Partea I

1. $[AC]$. **2.** *F*. **3.** $\sphericalangle X$ şi $\sphericalangle Z$. **4.** $[NP]$. **5.** $\sphericalangle N$ şi $\sphericalangle P$. **6.** $[BA]$ şi $[BC]$. **7.** $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle P$. **8.** $[CA]$ şi $[CB]$. **9.** $XZ=10$. **10.** $\sphericalangle Z$. **11.** $BC=9$. **12.** Triunghi echilateral. **13.** $[AB]$. **14.** Triunghi echilateral. **15.** 13. **16.** Isoscel. **17.** 55°. **18.** 60°. **19.** 10. **20.** Isoscel.

Soluţii – Partea a II-a

21. Într-un triunghi, laturii mai mare i se opune unghiul mai mare. Unghiul cel mai mare este $\sphericalangle N$, iar cel mai mic este $\sphericalangle P$. **22.** 10 cm. **23.** Fie ΔABC echilateral. Avem că $AB+AC+BC=12$. Dar cele trei laturi sunt egale. Rezultă că $AB=AC=BC=4$ cm. **24.** Fie x cea mai mică latură. Urmează că $x+2$ şi $x+4$ sunt următoarele două. Avem că: $x+(x+2)+(x+4)=27$, de unde rezultă că $x=7$. Triunghiul are laturile de 7 cm, 9 cm şi 11 cm. **25.** Cazul I: latura de 8 cm este bază. Atunci celelalte două sunt laturile congruente ale triunghiului. Cum suma tuturor este de 22 cm, rezultă că laturile triunghiului sunt de 8 cm, 7 cm şi 7 cm. Cazul II: latura de 8 cm este una dintre laturile congruente ale triunghiului isoscel Atunci latura congruentă cu ea este de 8 cm. În consecinţă baza este de $22-8-8=6$ cm. **26.** Fie x, y şi z laturile triunghiului. Avem că: $y=x+2$ şi $y=z-1$. De aici rezultă că: $x=y-2$ şi $z=y+1$. Înlocuind în $x+y+z=12$ rezultă $y=4$, $x=2$ şi $z=5$.

27. Din $\Delta MAB\equiv\Delta MAD$ (L.U.L.) rezultă $[MB]\equiv[MD]$. **28.** *a)* Din $\sphericalangle ECM\equiv\sphericalangle FBN$, $MC=NB$ şi $EC=FB$, avem $\Delta ECM\equiv\Delta FBN$ (L.U.L), deci $ME=NF$; *b)* $m(\sphericalangle BFN)=m(\sphericalangle CEM)$, deci $\sphericalangle AFN\equiv\sphericalangle AEM$, întrucât au acelaşi suplement; *c)* $\Delta AEM\equiv\Delta AFN$ (L.U.L.), deci $AM=AN$. **29.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Cum $m(\sphericalangle B)=45°$, rezultă $m(\sphericalangle C)=45°$, deci triunghiul este isoscel şi $[AB]\equiv[AC]$. Cum una dintre catete este de 10 cm, şi cealaltă catetă are 10 cm. **30.** Fiind isoscel, înălţimea din vârf este şi mediană. Fiind mediana din vârful unghiului drept, ea e jumătate din ipotenuză, adică 6 cm. Deci înălţimea căutată este de 6 cm. **31.** $\Delta OAB\equiv\Delta OBC\equiv\Delta OCA$ conform cazului de congruenţă L.L.L. Cum $\Delta ABO\equiv\Delta CBO$ (L.L.L.), rezultă $\sphericalangle ABO\equiv\sphericalangle CBO$, de unde $m(\sphericalangle OBC)=30°$. Analog, $m(\sphericalangle OCB)=30°$. Ca urmare, $m(\sphericalangle BOC)=120°$. **32.** $\Delta AMB\equiv\Delta NMC$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[AB]\equiv[CN]$ şi $\Delta AMC\equiv\Delta NMB$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[AC]\equiv[BN]$. **33.** Din $\Delta BAD\equiv\Delta CAD$ rezultă $[BA]\equiv[CA]$ şi $\sphericalangle BDA\equiv\sphericalangle CDA$, deci ΔABC este isoscel, iar $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC. **34.** *a)* Rezultă din $\Delta ABC\equiv\Delta DCB$. *b)* Tot din $\Delta ABC\equiv\Delta DCB$ avem $[AB]\equiv[DC]$, de unde, cum şi $[AD]\equiv[DA]$, rezultă că $\Delta BAD\equiv\Delta CDA$ (L.U.L.). **35.** Avem $\Delta BAD\equiv\Delta CAD$ (L.U.L.) de unde $[BF=BE+EF=CF+EF=CF$; *b)* $[AC]\equiv[BD]$ şi $\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle ACD$. **36.** *a)* Avem succesiv $\Delta ABE\equiv\Delta ACF$ (L.U.L.), de unde Triunghiul ABC este isoscel, deci $\sphericalangle ABE\equiv\sphericalangle ACF$. Rezultă că $\Delta ANP\equiv\Delta BPM\equiv\Delta CMN$ (L.U.L), de unde rezultă că $[AE]\equiv[AF]$. **37.** Se arată că $[NP]\equiv[PM]\equiv[MN]$. **38.** *a)* 30°; 5 cm. **39.** Triunghiul este echilateral. **40.** Avem $m(\sphericalangle QMP)=m(\sphericalangle NMR)=m(\sphericalangle NMP)+60°$. Atunci $\Delta QMP\equiv\Delta NMR$ (L.U.L.) de unde $[QP]\equiv[VR]$. **41.** În ΔABM, cum $AM<BM$, rezultă $m(\sphericalangle B)<m(\sphericalangle BAM)$. În ΔACM, din $AM<CM$, rezultă $m(\sphericalangle C)<m(\sphericalangle CAM)$. Atunci $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle BAM)+m(\sphericalangle CAM)>m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle B)=180°-m(\sphericalangle A)$, adică $m(\sphericalangle A)>180°-m(\sphericalangle A)\Rightarrow 2m(\sphericalangle A)>180°\Rightarrow m(\sphericalangle A)>90°$, deci ΔABC este obtuzunghic. **42.** *a)* $\Delta MBC\equiv\Delta NCB$ (L.U.L.) $\Rightarrow\Delta DBC\equiv\Delta ECB$ (L.U.L.) $\Rightarrow DB=CE$. *b)* Din $\Delta MBC\equiv\Delta NCB$ rezultă $\sphericalangle BMC\equiv\sphericalangle CNB\Rightarrow\sphericalangle AMD\equiv\sphericalangle AME$ (opuse la vârf) $\Rightarrow$ $\Delta AMD\equiv\Delta ANE$ (L.U.L.), de unde $AD=AE$. *c)* $\Delta ABO\equiv\Delta ACO$ (L.U.L.) $\Rightarrow\sphericalangle BAO\equiv\sphericalangle CAO$. *d)* Din $\Delta ADN\equiv\Delta AEM$ (L.U.L.) obţinem $DN=ME$.

Tema 2.2 Patrulatere

Soluții – Partea I

1. 360°. **2.** 170°. **3.** 34 cm. **4.** 133° . **5.** 60 cm^2. **6.** 30°. **7.** 9 cm^2. **8.** 20 cm^2. **9.** 50 cm. **10.** 3 mm. **11.** 14 cm. **12.** 144 dm^2. **13.** 48 cm^2. **14.** 2 cm. **15.** 27 cm^2. **16.** 54 cm^2. **17.** 9 cm. **18.** 70 cm^2. **19.** 24 cm. **20.** 20 cm.

Soluții – Partea a II-a

21. ***a)*** 45°, 60°, 120°, 135°; ***b)*** 36°, 72°, 108°, 144°. **22.** 57 cm. **23.** 4,4 m. **24.** ***a)*** 24 cm; ***b)*** 60°. **25.** ***a)*** 72 cm^2; ***b)*** 18 cm^2. **26.** ***a)*** 36 cm^2; ***b)*** $A_{ABCD} = 72$ cm^2, $A_{\Delta NOC} = \frac{1}{2} A_{\Delta DOC} = 9$ cm^2. **27.** ***a)*** $L = 18$ m, $l = 6$ m ; ***b)*** $A = 108$ m$^2 = 1{,}08$ ari < 2 ari . **28.** ***b)*** Se arată că diagonalele se înjumătățesc. **29.** 160°. **30.** ***a)*** Se arată că ΔABD este echilateral. **31.** ***a)*** $A = 1{,}5$ m^2 ; ***b)*** 60 cm . **32.** ***a)*** $L = 20$ cm, $l = 12$ cm ; ***b)*** $A = 240$ cm^2 . **33.** ***a)*** $A = 6$ cm ; ***b)*** 72 cm^2 . **34.** $m(\sphericalangle BMD) = 45^0$, $m(\sphericalangle BDM) = m(\sphericalangle DBM) = 67^0 30'$. **35.** ***a)*** 8 cm ; ***b)*** 60 cm^2 . **36.** ***a)*** $3\sqrt{2}$ m ; ***b)*** 72 m^2 . **37.** 64 cm^2. **38.** ***a)*** 8,5 cm ; ***b)*** 27 cm . **39.** ***a)*** $\frac{15}{2}$ cm ; ***b)*** $\frac{585}{4}$ cm^2 . **40.** ***b)*** 216 cm^2 . **41.** ***a)*** 40 m^2 ; ***b)*** 400 . **42.** ***b)*** $d = 2\sqrt{10}$ m > 6 m ; ***c)*** Sunt necesari 3,6 l de vopsea, deci trebuie cumpărate minim 4 cutii de 1 litru. **44.** ***a)*** 600 cm^2 ; ***b)*** Da. **45.** ***a)*** 12,5 m^2 ; ***b)*** 1,5 dm ; ***c)*** 556 plăci. **46.** ***a)*** 4 m^2 ; ***b)***80 lei. **47.** ***b)*** $L_{gard} = 80$ m $\frac{3}{x^2 + 4x + 7} \le \frac{3}{3} = 1$. ***c)*** d_{max} = diagonala $= \sqrt{1088}$ m < 33 m . **48.** ***a)*** 800 m^2 ; ***b)*** 300 m^2 ; ***c)*** 1500 kg . **49.** ***a)*** 70 cm ; ***b)*** 70 plăci. **50.** ***a)*** 20 stâlpi; ***b)*** 200 m.

Tema 2.3 Asemănare

Soluții – Partea I

1. 1. **2.** proporționale. **3.** ... congruente ... proporționale. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** pătratul. **6.** ***a)*** $\frac{2}{5}$; ***b)*** $\frac{3}{2}$; ***c)*** 6; ***d)*** 20. **7.** ***a)*** 6; ***b)*** 30; ***c)*** 12; ***d)*** 30. **8.** ***a)*** 24; ***b)*** 3; ***c)*** 36; ***d)*** 4. **9.** ***a)*** nu; ***b)*** da. **10.** 20. **11.** 3. **12.** 18. **13.** $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 16$ cm. **14.** 35°, 73°, 72°. **15.** 93°. **16.** 15 cm, 75°. **17.** 42. **18.** 38. **19.** 3,5. **20.** 17. **21.** 9,6. **22.** $AC = 10$ cm, $DE = 9$ cm. **23.** 11. **24.** ***a)*** 2; ***b)*** 2 cm^2. **25.** 3.

Soluții – Partea a II-a

26. ***a)*** $[FG]$,$[DE]$ și $[MN]$ sunt linii mijlocii în ΔADE , ΔABC , respectiv în trapezul $BCED$; ***b)*** $BC = 12$ cm , $MN = 9$ cm , $FG = 3$ cm . **27.** ***a)*** $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \overset{R.Thales}{\Rightarrow} DE \parallel BC$; ***b)*** $DE = 4$ cm .

28. Baza mare are 35 cm, iar baza mică 19 cm. **29.** ***a)*** $CD = 10$ cm; ***b)*** $CQ \parallel RN \parallel BP$, $[CN] \equiv [NB] \overset{T.P.E.}{\Rightarrow} [QR] \equiv [RP]$, deci R este mijlocul lui $[PQ]$. **30.** ***a)*** Se aplică teorema lui Thales: $DC \parallel AB \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$; ***b)*** $DC \parallel AB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD}$. **31.** ***a)*** $DE \parallel BC$; ***b)*** $DE \not\parallel BC$; ***c)*** $DE \not\parallel BC$. **32.** $NC = 12$ cm ; $BC = 20$ cm ; $AB = 10$ cm .

33. $NP \parallel AC \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \frac{BP}{PC} = \frac{BN}{NO} = \frac{BM}{MA} = 4$, $\{O\} = AC \cap BD$; $\frac{BN}{NO} = 4 \Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{2}{5}$. **34.** ***a)*** $[BD$ bisectoarea $\sphericalangle ABC \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{BC}{BA} = \frac{CD}{DA} \Rightarrow AD = 10$ cm; $DC = 16$ cm; ***b)*** $BC = 18$ cm. **35.** ***a)*** 12 cm; ***b)*** $AO = 12$ cm , $OC = 4$ cm . **36.** $AM = 18$ cm , $MB = 30$ cm . **37.** ***a)*** $AB = 8$ cm ; ***b)*** $\frac{1}{2}$. **38.** ***a)*** $BD = 6$ cm , $CD = 4$ cm ; ***b)*** $P_{ABDE} = 22{,}2$ cm. **39.** $MB = 6$ cm , $AN = 2$ cm , $AC = 6$ cm . **40.** ***a)*** $MN \parallel BC, NP \parallel AB \Rightarrow MNPB$ paralelogram; ***b)*** $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (1). $NP \parallel AB \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{NC}{AC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AM}{AB} + \frac{PC}{BC} = \frac{AN + NC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$. **41.** ***a)*** $\frac{AM}{AB} = \frac{NC}{BC} \Rightarrow MN \parallel AC$; ***b)*** $\frac{3}{5}$.

42. ***a)*** $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC$; ***b)*** $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow$ $\frac{1}{3} = \frac{DE}{12} \Rightarrow DE = 4$ cm. **43.** ***a)*** $AB \parallel NP$ (1), $NA \cap PB = \{M\} \Rightarrow NA \not\parallel BP$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $ABPN$ trapez; ***b)*** $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow MA = 2k$, $AN = 3k$, $k \in \mathbb{Q}_+$, $MA + AN = MN \Rightarrow 5k = 15$ cm $\Rightarrow$ $k = 3$ cm $\Rightarrow$ $MA = 6$ cm , $AN = 9$ cm ; $AB \parallel NP \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP} = \frac{AB}{NP}$; $\frac{6}{15} = \frac{MB}{20} = \frac{AB}{13{,}5} \Rightarrow MB = 8$ cm , $AB = 5{,}4$ cm , $P_{\Delta MAB} = 19{,}4$ cm ; $P_{ABPN} = 39{,}9$ cm . **44.** ***a)*** $AG = \frac{2}{3} AM = 6$ cm, $GP \parallel BC \Rightarrow \Delta AGP \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{GP}{MC} \Rightarrow GP = 4$ cm ; ***b)*** $\Delta NGP \sim \Delta NBC \Rightarrow \frac{NG}{NB} = \frac{GP}{BC} = \frac{NP}{NC} \Rightarrow NP = 5$ cm . **45.** ***a)*** $ADA'E$ romb; ***b)*** $A'D = AD = AE = A'E = x$; $A'D \parallel AC \Rightarrow \Delta BA'D \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{A'D}{AC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7{,}2$ cm $\Rightarrow$ $P_{ADA'E} = 28{,}8$ cm . **46.** Se demonstrează că $ADEF$ paralelogram. $DE \parallel AC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow DE = \frac{15}{2}$ cm $= 7{,}5$ cm; $P_{ADEF} = 25$ cm. **47.** ***a)*** $FD \parallel BC$, $DE \parallel AB \Rightarrow BEDF$ paralelogram $\Rightarrow FD = BE$. $FD \parallel BC \Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{BE}{BC}$. ***b)***$\Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AC}$ (1), $\Delta CED \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = \frac{AD + CD}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$. **48.** ***a)*** $OE \parallel AB \Rightarrow \Delta OED \sim \Delta BAD \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD}$ (1) $OE \parallel CD \Rightarrow \Delta AEO \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{OE}{CD} = \frac{AE}{AD}$ (2). Atunci $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = \frac{DE + AE}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$; ***b)*** $EF = OE + OF$. Ca și la punctul ***a)***, se arată că $\frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} = 1$. Atunci $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} = 1 + 1$, adică $\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 2$. **49.** ***a)*** $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{BAC})$, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC}) \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC$; ***b)*** $AD = 6$ cm , $AE = \frac{36}{5} = 7{,}2$ cm. **50.** $m(\widehat{A}) = 78^0 \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \frac{180^0 - 78^0}{2} = 51^0 =$ $m(\widehat{P}) = m(\widehat{N}) \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABC \sim \Delta MNP$. **51.** ***a)*** $DE \parallel BC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{11}$; ***b)*** $x = 8$. **52.** ***a)*** $DF \parallel BC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB}$; ***b)*** $DE \parallel AC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta BED \sim \Delta BCA$; ***c)*** $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$. **53.** ***a)*** $[MP]$ este linie mijlocie în $\Delta CBN \Rightarrow BN = 2MP$; ***b)*** $MP \parallel AN, MP = AN \Rightarrow APMN$ paralelogram (1). Se arată că ΔMNB este dreptunghic în M, $m(\widehat{B}) = 30^0 \Rightarrow MN = \frac{BN}{2} = AN$ (2).Din (1) și (2) rezultă că $APMN$

este romb. **54.** *a)* $m(\widehat{ACB}) = 90^0 - m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}) \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{ABC}$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACB} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABD \sim \Delta CBA$; *b)* $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DAC}$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DCA} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABD \sim \Delta CAD$; *c)* $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{DCA} \equiv \widehat{ACB} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ADC \sim \Delta BAC$. **55.** *a)* $m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ABC}) = 36^0$, $m(\widehat{BDC}) = 180^0 - (36^0 + 72^0) = 72^0 \Rightarrow \widehat{BDC} \equiv \widehat{BCD} \Rightarrow$ ΔDBC isoscel; *b)* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DBC}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BDC} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABC \sim \Delta BDC$. **56.** *a)* $BD = 4$ cm, $CD = 5$ cm; *b)* $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{4}{5}$. **57.** *a)* Se arată că $[AM]$ este linie mijlocie în ΔBNC; *b)* $AM \parallel NC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow}$ $\Delta PAM \sim \Delta PCN \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{NC} = \frac{1}{2}$. Deci $PC = 2AP$. **58.** $P_{DEF} = 11{,}5$ cm. **59.** *a)* $BD = 6$ cm, $DC = 9$ cm; *b)* $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{2}{3}$. **60.** $\Delta ABM \sim \Delta DNM \Rightarrow \frac{AB}{DN} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}$, $\frac{AB}{DN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{DN + AB} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{AB}{NC} = \frac{3}{5}$. $\Delta ABP \sim \Delta CNP \Rightarrow \frac{AB}{NC} = \frac{BP}{PN} = \frac{AP}{CP} = \frac{3}{5}$, $AM \parallel BC \Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta CBP \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{MP}{BP} \Rightarrow MP = \frac{3}{5}BP$; $\frac{BM}{MN} = \frac{AB}{ND} = \frac{3}{2}$, $\frac{BP + PM}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BP + \frac{3}{5}BP}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{8}{5}BP}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BP}{MN} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$.

Tema 2.4 Relații metrice

Soluții – Partea I

1. 2 cm. **2.** 8 cm. **3.** 12 cm. **4.** 10 cm. **5.** 2 dm. **6.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **7.** 90^0. **8.** 6 cm^2. **9.** 20 cm^2. **10.** $\frac{36}{5}$ cm. **11.** $72\sqrt{3}$ cm^2. **12.** 0. **13.** $-\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{1}{4}$. **15.** $\sqrt{3}$. **16.** $\frac{7}{5}$. **17.** 9. **18.** 15 cm^2. **19.** $\frac{24}{25}$. **20.** 12 cm.

Soluții – Partea a II-a

21. *b)* 14 cm, 21 cm. **22.** $21(\sqrt{2}+1)$ cm. **23.** $4\sqrt{3}$ cm. **24.** *a)* $3(\sqrt{6}+\sqrt{3}+3)$ cm; *b)* $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ cm^2. **25.** *a)* $10(\sqrt{3}+3)$ cm; *b)* $100\sqrt{3}$ cm^2. **26.** *a)* 4,8 cm; *b)* 96 cm^2. **27.** *a)* $4\sqrt{3}$ cm; *b)* 40 cm. **28.** 60 cm. **29.** *a)* 12 cm; *b)* $3\sqrt{3}$ cm. **30.** *a)* 6 cm; *b)* $3\sqrt{5}$ cm. **31.** *b)* $P_{ABC} = 6(2\sqrt{7}+1)$ cm. **32.** *a)* dreptunghic în B; *b)* $\frac{3}{5}$; *c)* $5\sqrt{13}$ cm. **33.** *a)* $P_{ABCD} = 2\sqrt{3}(4+2\sqrt{2})$ cm; *b)* $\frac{1}{2}$. **34.** *a)* 36 cm; *b)* $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{5}{4}$. **35.** *a)* $AB = 2\sqrt{13}$ cm, $AC = 3\sqrt{13}$ cm, $BC = 13$ cm; *b)* $\sin C + \cos C = \frac{5\sqrt{13}}{13}$. **36.** *a)* $32\sqrt{3}$ cm^2; *b)* $4\sqrt{13}$ cm; *c)* $8\sqrt{3}$ cm. **37.** *a)* $A_{ABCD} = 2A_{ABD} = 50\sqrt{3}$ cm^2; *b)* $m(\sphericalangle EBN) = 60^0$; *c)* ΔEBN este echilateral de latură 10 cm, deci $A_{EBN} = 25\sqrt{3}$ cm^2. Atunci $A_{ADCMNEF} = 25(8+3\sqrt{3})$ cm^2. **38.** *a)* $A = 12\sqrt{5}$ m^2; *b)* $x = 3$ m. **39.** *a)* 10 cm; *b)* $x = 1$ cm. **40.** *a)* $A_{AEF} = A_{ABCD} - A_{CEF} - 2A_{ADF} = \frac{a^2}{2}$; *b)* $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **41.** *b)* 15 m; *c)* 2 minute și 30 secunde. **42.** Aria pătratului este 14400 cm^2, deci pentru vopsirea unei fețe se consumă 960 g de vopsea. Pentru vopsirea tablei este nevoie de 1,920 kg vopsea. **43.** *a)* $150 \text{ pași/min} \times 0{,}8 \text{ m} = 120 \text{ m/min} = 2 \text{ m/s}$; *b)* Diagonala pieței are lungimea $d = 40 \text{ s} \cdot 2 \text{ m/s} = 80$ m, deci lungimea laturii pieței este $40\sqrt{2}$ m. Aria pieței este 3200 m^2; *c)* Aria unei dale este $25 \cdot 80 = 2000 \text{ cm}^2 = 0{,}2 \text{ m}^2$. Sunt necesare 16000 de dale. **44.** *b)* 18,75 m^2; *c)* $P_{DEBC} = 87{,}5$ m. **45.** *a)* 450 m^2; *b)* $L_{gard} = 49\sqrt{2}$ m $\simeq 69{,}09$ m. Prețul va fi 2963,6 lei, deci sunt suficienți 3000 lei. **46.** *a)* 4 m și 6 m; *b)* 14,4 m^2; *c)* l_{cablu} = diagonala $= 2\sqrt{13}$ m > 7 m $\Rightarrow$ nu sunt suficienți 7 m de cablu. **47.** *a)* 8 m; *b)* 2 m; *c)* 3,75 m. **48.** *a)* 15 cm; *b)* 72 cm^2; *c)* $A_{DMB} = 25\% A_{DCB}$. **49.** *b)* $100 \cdot A_{gresie} = 1{,}6608$ m^2. $A_{baie} = 3{,}75$ m$^2 \Rightarrow$ nu sunt suficiente. **50.** *a)* $48\sqrt{3}$ m^2; *b)* 84 m^2; *c)* 3570 lei.

Tema 2.5 Cercul

Soluții – Partea I

1. 60^0. **2.** 90^0. **3.** $25\sqrt{3}$ cm^2. **4.** 30^0. **5.** mediatoarelor. **6.** bisectoarelor. **7.** echilateral. **8.** $2\sqrt{3}$ cm. **9.** $2\sqrt{3}$ cm. **10.** 5 cm. **11.** $10\sqrt{2}$ cm. **12.** 225π cm^2. **13.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. **14.** 6 cm. **15.** $10\sqrt{2}$ cm. **16.** $\frac{8\pi}{3}$ cm. **17.** $(36-9\pi)$ cm^2. **18.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ cm. **19.** 12 cm. **20.** 4π cm^2.

Soluții – Partea a II-a

21. 20 cm. **22.** 30^0. **23.** *a)* $10\sqrt{2}$; *b)* $5\sqrt{2}$. **24.** *a)* $4\sqrt{3}$ cm; *b)* 6 cm. **25.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **26.** *a)* 5; *b)* 4π cm. **27.** *a)* $\frac{15}{2}$; *b)* 2 cm. **28.** *a)* 12 cm; *b)* $A = 720$ cm^2, $P = 120$ cm. **29.** $R = \frac{13}{2}$ cm, $r = 2$ cm. **30.** $x = 2\sqrt{5}$ cm. **31.** Fie O_1, O_2 centrele cercurilor, AB punctele de intersecție ale cercurilor și $[T_1T_2]$ o tangentă comună. Patrulaterul $O_1T_1T_2O_2$ este trapez dreptunghic și $O_1O_2^2 = MN^2 + (O_1T_1 - O_2T_2)^2$, deci $O_1O_2 = 13$ cm. Notând $\{P\} = AB \cap O_1O_2$, rezultă că AP este înălțime în triunghiul AO_1O_2. Folosind eventual formula lui Heron, deducem că $\mathcal{A}_{AO_1O_2} = 6\sqrt{30}$ cm. Se obține $AB = 2AP = \frac{24\sqrt{30}}{13}$ cm. **32.** $8\sqrt{3}$ cm. **33.** *a)* $R = 15$ cm, $d = 24$ cm. **34.** 4 cm. **35.** 10 cm. **36.** $5\sqrt{2}$ cm. **37.** $l = 15$ mm, $D = 5\sqrt{3}$ mm. **38.** $D = 15\sqrt{2}$ cm. **39.** Lungimea cerută este dublul tangentei exterioare comune a celor două cercuri. Cu notațiile din rezolvarea problemei **31.** avem $T_1T_2^2 = O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2$, de unde se obține că $T_1T_2 = 40$ cm. **40.** Fie $\{M\} = AD \cap BC$; atunci $AM = 2$ cm, $OM = 8$ cm, $BM = 6$ cm, $AB = AC = 2\sqrt{10}$ cm și $BD = CD = 6\sqrt{10}$ cm. Se obține $\mathcal{P}_{ABDC} = 16\sqrt{10}$ cm și $\mathcal{A} = 120$ cm^2.

Tema 2.6 Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu

Soluții – Partea I

1. 6. **2.** 6. **3.** *a)* 5; *b)* 10. **4.** *a)* 1; *b)* 20. **5.** F. **6.** *a)* F; *b)* F, corect ar fi $BD \subset (ABD)$; *c)* A; *d)* F. **7.** *a)* A; *b)* F; *c)* F. **8.** *a)* $2\sqrt{2}$ cm; *b)* $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ cm; *c)* $\sqrt{2}$ cm; *d)* $\sqrt{2}$ cm. **9.** *a)* $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm; *b)* $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm; *c)* $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ cm; *d)* 3 cm. **10.** *a)* $4\sqrt{2}$ cm; *b)* $2\sqrt{6}$ cm; *c)* 4 cm; *d)* $2\sqrt{6}$ cm;

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm . **11. a)** $3\sqrt{7}$ cm ; **b)** $3\sqrt{3}$ cm . **12. a)** $\sqrt{6}$ cm ; **b)** 2 cm . **13. a)** $\frac{\sqrt{601}}{5}$ cm ; **b)** $\sqrt{37}$ cm ; **c)** 8 cm ; **d)** $\frac{8\sqrt{65}}{5}$ cm . **14. a)** $2\sqrt{6}$ cm ; **b)** 4 cm ; **c)** $4\sqrt{2}$ cm ; **d)** $2\sqrt{2}$ cm . **15. a)** $\sqrt{3}$ cm ; **b)** $\sqrt{3}$ cm ; **d)** 2 cm . **17. a)** A ; **b)** F ; **c)** A ; **d)** A ; **e)** A . **18. a)** B' ; **b)** A ; **c)** $[CC']$; **d)** CD ; **e)** $[AC]$; **f)** $[BC']$. **20. b)** $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ cm^2 ; **c)** $3\sqrt{3}$ cm ; **d)** $\frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm .

Soluţii – Partea a II-a

21. a) $3\sqrt{3}$ cm ; **b)** $[MS]$ este linie mijlocie în $\Delta BVC \Rightarrow MS \parallel VC, VC \subset (VAC) \Rightarrow MS \parallel (VAC)$; **c)** 60^0 ; **d)** 45^0 . **22. a)** $BM = 2,(6)$ cm ; **b)** $\cos(\sphericalangle BOM) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **23. a)** P este mijlocul segmentului $[AC]$; **b)** Dacă P este mijlocul segmentului $[AC]$, atunci în triunghiul MNP, $MN < NP + MP = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$. **24.** $BB' = 5$ cm . **25. a)** În triunghiul ACD', $[AQ]$, $[CP]$ şi $[D'O]$ sunt mediane; **b)** $AB = \sqrt{30}$ cm. **26. a)** $TQ \parallel BC \Rightarrow m(\sphericalangle TQ, BC) = 0^0$; **b)** $P_{TQCB} = \frac{68}{3}$ cm $A_{TQCB} = \frac{64}{3}$ cm^2 . **27.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **28. a)** Fie $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$. În $\Delta CB'D'$, $[OO']$ este linie mijlocie, $CD' \parallel OO' \Rightarrow \cos(\sphericalangle AO; CD') = \cos(\sphericalangle AOO')$. Dacă $AT \perp OO'$, $T \in (OO')$, atunci $AO = AO' = 4\sqrt{6}$ şi $OT = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cos(\sphericalangle AOO') = \frac{OT}{AO} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **b)** Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **29.** $\Delta A'BC'$ este echilateral $\Rightarrow L^2 + l^2 = h^2 + L^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow L = l = h$.

30. a) Deoarece $BC \parallel AD$ şi $AD \subset (MAD)$, rezultă $BC \parallel (MAD)$. **b)** Cum $BD \perp AC$ şi $BD \perp AM$, rezultă $BD \perp (MAC)$. **c)** $CB \perp AB$ şi $CB \perp AM$ implică $CB \perp (MAB)$, deci $d(C;(MAB)) = CB$. **31.** Cu reciproca teoremei lui Thales se arată că $G_1G_2 \parallel AC$. **32. a)** Deoarece segmentul (OO') este linie mijlocie în triunghiul $\Delta ACB' \Rightarrow OO' \parallel AB', AB' \subset (AA'B') \Rightarrow OO' \parallel (AA'B')$. **b)** Dacă $A'C' \cap B'D' = \{S\} \Rightarrow$ patrulaterul $BOD'S$ paralelogram $\Rightarrow D'O \parallel SB, SB \subset (A'BC') \Rightarrow D'O \parallel (A'BC')$. **c)** $OO' \parallel AB'$ şi $AB' \perp (A'D'C) \Rightarrow OO' \perp (A'D'C)$. **33. a)** Fie $AB = l$. Avem $BO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ şi, aplicând teorema catetei în triunghiul DOB, dreptunghic în O, obţinem $OB^2 = BM \cdot BD \Rightarrow BM = \frac{l}{3}$. Fie $CS \perp BD, S \in (BD)$. Întrucât CS este înălţime în triunghiul echilateral DBC, rezultă $CS = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ şi $SM = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$. În ΔSMC , $m(\sphericalangle MSC) = 90°$, din teorema lui Pitagora rezultă $SM^2 + SC^2 = MC^2$, de unde $l = 6$. **b)** Fie $T \in (AB)$ astfel încât $BT = 2 \Rightarrow MC = CT = 2\sqrt{7}$ cm şi $MT = 2$ cm. Rezultă $\cos(\widehat{CM, AD}) = \cos(\widehat{CMT}) = \frac{\sqrt{7}}{14}$. **34.** Fie $AM \cap BC = \{S\}$ şi $AN \cap CD = \{T\}$. Triunghiul ΔABS isoscel, deci $AM = MS$. Triunghiul ΔACT isoscel, deci $AN = NT$. În concluzie, segmentul (MN) este linie mijlocie în triunghiul $\Delta AST \Rightarrow MN \parallel ST, ST \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$. **35.** Dacă $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow$ segmentul (MO) este linie mijlocie în triunghiul $\Delta AEC \Rightarrow EC \parallel MO, MO \subset (MDB) \Rightarrow EC \parallel (MDB)$. **37. a)** În ΔABM avem: $AM^2 = 16 + 4 = 20$, iar în ΔAMN: $MN^2 = 20 + 4$, deci $MN = 2\sqrt{6}$ cm. ΔMNP este echilateral, deci aria sa este $6\sqrt{3}$ cm^2. b) În ΔBCD, $[OM]$ este linie mijlocie, deci $OM = \frac{CD}{2}$ şi $OM \parallel CD$. Dar $PD' = \frac{C'D'}{2} = \frac{CD}{2}$ şi $PD' \parallel CD$. Deci, $PD'OM$ este paralelogram. **c)** Fie T mijlocul laturii $[B'C']$. În trapezul $A'NMT$, $TA' \cap MN = \{S\}$. Deoarece $A'N \parallel TM$ şi $2 \cdot NA' = TM \Rightarrow [A'N]$ este linie mijlocie în $\Delta MST \Rightarrow TA' = A'S$. Din $MN \cap TA' = \{S\}$ şi $TA' \subset (A'B'C')$, avem că: $\{S\} = (A'B'C') \cap MN$. În figura alăturată, $SQ \perp B'C'$, $Q \in C'B'$. $[A'B']$ este linie mijlocie în $\Delta STQ \Rightarrow SQ = 2 \cdot A'B' = 8$ cm şi $C'Q = 6$ cm. În $\Delta SC'Q$, avem $SC' = 10$ cm. **37. a)** Fie $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow (MO)$ linie mijlocie în trapezul $ACGE \Rightarrow MO = 6$ cm şi $MO \perp (ABC)$. Analog $NO = 7$ cm şi $NO \perp (ABC)$. Obţinem $M \neq N$. **b)** $MO \perp (ABC)$ şi $NO \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$. **38. a)** Dacă M, P, Q sunt mijloacele laturilor $AB, BC, AC \Rightarrow \frac{DG_3}{DM} = \frac{DG_1}{DP} = \frac{DG_2}{DQ} = \frac{2}{3} \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} G_1G_2, G_1G_3 \parallel (ABC) \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$. **b)** $\frac{G_1G_3}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{ABC}} = \frac{1}{9}$. **39.** Fie S şi P mijloacele muchiilor (EF), (AD) şi $AS \cap BC = \{T\} \Rightarrow T$ este mijlocul segmentului (AT). În triunghiul ΔATD , (SP) este linie mijlocie $\Rightarrow SP \parallel TD, TD \subset (BCD) \Rightarrow SP \parallel (BCD)$. **40.** Dacă $AB = a$ şi $AE = x \Rightarrow DH = \sqrt{2a^2 + x^2}$ şi $CH = \sqrt{2a^2 + (a-x)^2}$. Se obţine ecuaţia $\frac{2a^2 + x^2}{3a^2 - 2ax + x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = a\left(\sqrt{10} - 3\right)$. Avem $\frac{AE}{EB} = \frac{\sqrt{10}-2}{6}$. **41. a)** Dacă T este mijlocul segmentului (RD) obţinem din teorema lui Thales $\frac{AR}{RD} = \frac{2}{3}$ şi cum $\frac{AM}{MG} = 2 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{RA}{RD}$. **b)** $\frac{AR}{RD} = \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3} \Rightarrow (PQR) \parallel (BCD)$. **42. a)** $BQ \parallel MD$ şi $QO \parallel DP \Rightarrow (DPM) \parallel (QOB)$. **b)** $\sin(\sphericalangle BQ; D'C') = \sin(\sphericalangle ABD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **c)** $d((DPM);(QOB)) = 4$ cm. **43.** Fie O' centrul de greutate al triunghiului ΔABD. Din reciproca teoremei lui Thales avem $OO' \parallel CD \Rightarrow m(\sphericalangle OM; CD) = m(\sphericalangle O'OM)$. Deoarece $OM = 3$ cm, $OO' = 2$ cm şi $MO' = \sqrt{3}$ cm obţinem $\cos(\sphericalangle MOO') = \frac{5}{6}$. **44. a)** Cu teorema lui Pitagora în triunghiul $AA'G$ obţinem $A'G = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AB = 6$ cm. b) Dacă $\{O\} = AB' \cap A'B$, atunci (OP) linie mijlocie în triunghiul $\Delta AB'C' \Rightarrow AC' \parallel OP, OP \subset (A'BP) \Rightarrow AC' \parallel (A'BP)$. **45.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **46. a)** $P_{BA'C} = 41 + 7\sqrt{31} + 9\sqrt{2}$ cm , $A_{BA'C} = \frac{63\sqrt{62}}{2}$ cm^2 . **47. a)** 2 cm; **b)** 45° ; **c)** (OO') linie mijlocie în triunghiul $\Delta A'BC' \Rightarrow OO' \parallel A'B \Rightarrow OO' \parallel (BCD')$. În aceste condiţii lungimea proiecţiei segmentului $[OO']$ pe planul (BCD') este egală cu lungimea segmentului $[OO']$, adică $2\sqrt{2}$ cm. **48. a)** $\sqrt{22}$ cm ; **b)** $3\sqrt{2}$ cm ; **c)** $\frac{\sqrt{330}}{5}$ cm ; **d)** 2 cm . **49. a)** $d(S;BD) = 2\sqrt{7}$ cm; **b)** $d(S;CD) = 2\sqrt{7}$ cm; **c)** În triunghiul ΔACS, $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AS = 4$ cm şi $SC = 8$ cm $\Rightarrow m(\sphericalangle SC;(ABC)) = 30°$. **d)** $d(A;(SDC)) = \frac{4\sqrt{21}}{7}$ cm. **50. a)** Triunghiul ΔMAO, $\{O\} = AC \cap BD$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle(MBD);(ABC)) = 45°$. **b)** $m(\sphericalangle(MBD);(TBD)) = 45°$. **c)** $tg(\sphericalangle(MBC);(ABC)) = \sqrt{3}$.

Soluţii – Partea I

1. 108 cm². **2.** $90\sqrt{3}$ cm³. **3.** $16(\sqrt{3}+1)$ cm². **4.** 216 cm³. **5.** 24 cm². **6.** 36 cm². **7.** 120 cm². **8.** $75\sqrt{3}$ cm³. **9.** $(216+32\sqrt{3})$ cm². **10.** 15π. **11.** 144 cm². **12.** 96π. **13.** $81+45\sqrt{3}$. **14.** 48π. **15.** 200 cm². **16.** $1000\sqrt{6}$ cm³. **17.** 96. **18.** 175π. **19.** 100. **20.** $72\sqrt{3}$ cm². **21.** $72\sqrt{3}$. **22.** $16\sqrt{6}$ cm³. **23.** $54\sqrt{6}$. **24.** 76. **25.** 16π. **26.** $\frac{57\sqrt{3}}{2}$. **27.** $54\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ cm². **28.** $36\sqrt{3}$ cm². **29.** $\frac{37\sqrt{3}}{3}$. **30.** $128\sqrt{2}$ cm². **31.** 40π. **32.** $54\sqrt{3}$. **33.** 384 cm². **34.** $\frac{1630\pi}{3}$. **35.** $36\sqrt{3}$ cm². **36.** $\frac{32\pi}{3}$. **37.** 324 m³.

Soluţii – Partea a II-a

38. *a)* $V_{cub}=l^3\Rightarrow l=5\text{cm}\Rightarrow A_{t\,cub}=150\text{cm}^2$; *b)* $V_{OA'B'C'D'}=\frac{125}{3}\text{cm}^3$.

39. *a)* $A_t=2\cdot L\cdot l+2\cdot L\cdot h+2\cdot l\cdot h=(16\sqrt{3}+8)\text{cm}^2$; *b)* $V=L\cdot l\cdot h=8\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **40.** *a)* $V=96\pi$. *b)* $10\cdot 10\cdot\sin(\sphericalangle AVB)=8\cdot 12\Rightarrow\sin(\sphericalangle AVB)=\frac{24}{25}$. **41.** *a)* Din $BC\perp AM$ şi $BC\perp VM$ rezultă $BC\perp(VAM)$, de unde $BC\perp VA$. *b)* $VO=2\sqrt{6}$ cm $\Rightarrow V=18\sqrt{2}\,\text{cm}^3$. **42.** *a)* $A_t=74\sqrt{3}$ cm². *b)* Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul, $\frac{VO'}{VO}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow\frac{VO'}{VO'+4}=\frac{6}{8}\Rightarrow VO=16$ cm, $V=\frac{256\sqrt{3}}{2}$ cm³. **43.** *a)* $54\sqrt{3}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot l\Rightarrow l^3=216\Rightarrow l=6\text{cm}$. *b)* $V=252\sqrt{2}$ cm³. **44.** *a)* Fie $A'P\perp AC\Rightarrow\Delta AA'P$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow OO'=3\sqrt{2}$ cm. *b)* $A_t=(108+18\sqrt{3})\text{cm}^2$. **45.** *a)* $V=A_b\cdot h=36\cdot 7=252\text{cm}^3$. *b)* $A_t=A_l+2\cdot A_b=168+72=240\text{cm}^2$. **46.** *a)* Fie $ABB'A'$ secţiunea axială în trunchiul de con şi V vârful conului din care provine trunchiul. Cum $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul VAB, triunghiul VAB este echilateral, deci $m(\sphericalangle VA,(ABC))=m(\sphericalangle VBO)=60°$. *b)* $V=9000\pi\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **47.** *a)* $\text{tg}\,60°=\frac{12}{a_b}\Rightarrow a_b=4\sqrt{3}$ cm; $a_b=\frac{AB\sqrt{3}}{6}\Rightarrow AB=24$ cm. *b)* $V=576\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

48. *a)* În triunghiul dreptunghic $C'CO$ avem $108=x^2+3x^2\Rightarrow x=AB=3\sqrt{3}$ cm. *b)* $A_t=A_l+2\cdot A_b=243\sqrt{3}$ cm². **49.** *a)* $DB^2=D'B^2-D'D^2\Rightarrow DB=12\sqrt{2}\Rightarrow AB=12$ cm. $V=A_b\cdot h=1296\text{cm}^3$. *b)* $OD'=\sqrt{D'D^2+DB^2}=13\sqrt{17}$ cm, $A_{\Delta ACD'}=\frac{AC\cdot OD'}{2}=18\sqrt{34}\,\text{cm}^2$.

50. *a)* Fie M mijlocul laturii $[AB]$. $Al=3AB\cdot VM=48\sqrt{3}$, $VM=4\sqrt{3}\Rightarrow AB=4$ cm. *b)* $V=48\sqrt{3}$ cm³. **51.** *a)* $MQ=MN=NP=PQ\Rightarrow MNPQ$ este romb. Avem $\Delta MBN\equiv\Delta NCP\Rightarrow m(\sphericalangle NMB)=m(\sphericalangle PNC)$ şi $m(\sphericalangle NMB)+m(\sphericalangle MNB)=90°$. Atunci $m(\sphericalangle MNB)+m(\sphericalangle PNC)=90°\Rightarrow m(\sphericalangle PNM)=90°$ şi, cum $MNPQ$ este romb, rezultă că $MNPQ$ este pătrat. *b)* $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=16\text{cm}^3$.

52. *a)* În triunghiul $A'AM$ avem $l^2+\frac{l^2}{4}=20\Rightarrow l^2=16\Rightarrow l=4$ cm; $A_t=6\cdot l^2=96\text{cm}^2$. *b)* $A_{A'MD}=4\sqrt{6}\,\text{cm}^2$. Avem $9=\sqrt{81}<\sqrt{96}<\sqrt{100}=10$. **53.** *a)* $A_l=120\pi$ cm². *b)* $V=100\pi$ cm³.

54. *a)* $OM=\frac{l\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$; $VM=\frac{l\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\Rightarrow VO=2\sqrt{6}$ cm; $V=18\sqrt{2}\,\text{cm}^3$. *b)* Avem $AM=3$ $AN=3\sqrt{3}$, $MC=3\sqrt{3}$, $NC=3\Rightarrow MN=3\sqrt{2}$. Rezultă $AN^2=AM^2+MN^2$, deci triunghiul AMN este dreptunghic, iar $A_{\Delta AMN}=\frac{AM\cdot AN}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$. **55.** *a)* Din ipoteză $\frac{r}{2}=\frac{R}{3}=k\Rightarrow R=3k, r=2k$. Fie trunchiul de con circular drept $ABB'A'$ şi $B'P\perp AB, P\in(AB)$, $B'P=PB=10$ cm şi din $PB=R-r\Rightarrow 3k-2k=10\Rightarrow k=10\Rightarrow R=30$ cm. *b)* $A_t=100\pi(5\sqrt{2}+13)\text{cm}^2$. **56.** *a)* Din triunghiul dreptunghic ASM obţinem $\frac{3l^2}{4}=144-\frac{l^2}{4}\Rightarrow l^2=144\Rightarrow l=12$ cm. Atunci $SO^2=SA^2-AO^2\Rightarrow SO=2\sqrt{6}$ cm. Obţinem $V=72\sqrt{2}\,\text{cm}^3$. *b)* Punctele P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[AO]$ şi $[BO]$. Aşadar $[PQ]$ este linie mijlocie în triunghiul AOB, deci $PQ=6$ cm. Înălţimea corespunzătoare laturii $[PQ]$ este egală cu $5\sqrt{3}$ cm, iar aria triunghiului CPQ este egală cu $15\sqrt{3}$ cm. **57.** *a)* $A_t=A_l+A_b\Rightarrow 24\pi=15\pi+A_b\Rightarrow R=3$ cm. *b)* $V=\frac{21\pi}{2}\text{cm}^3$. **58.** *a)* $MD=MB=\frac{l\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm. Dacă $MP\perp BD, P\in(BD)$, atunci conform teoremei lui Pitagora în triunghiul MPB obţinem $MP=2\sqrt{2}$ cm. *b)* $V=\frac{l^3\sqrt{2}}{12}=\frac{16\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$. **59.** *a)* Fie M mijlocul $[AB]$ şi M' mijlocul segmentului $[A'B']\Rightarrow MM'=12$ cm. Din $\Delta M'B'P\sim\Delta MAP\Rightarrow PM=9$ cm şi aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul PAM obţinem $PA=9\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow P_{\Delta PAB}=18(\sqrt{2}+1)$ cm. *b)* $V=936\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **60.** *a)* $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=288\text{ cm}^3$. *b)* $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul SPC, deci $MO\parallel SC\Rightarrow MO\parallel(SEC)$.

61. *a)* $4\pi R^2=36\pi\Rightarrow R^2=9\Rightarrow R=3$ cm. *b)* $V=36\pi\text{ cm}^3$. **62.** *a)* $A_l=12\cdot h=72\Rightarrow h=6$cm. *b)* $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{4\sqrt{3}\cdot 6}{3}=8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **63** *a)* $AD\perp(DCC'D')$ şi $D'C\subset(DCC')\Rightarrow D'C\perp AD$. *b)* $DB=5\sqrt{2}\Rightarrow D'B=10\sqrt{2}\Rightarrow$ conform teoremei lui Pitagora: $DD'=5\sqrt{6}$ cm. Aria laterală a prismei este egală cu $100\sqrt{6}$ cm². **64.** *a)* $\frac{72\cdot h}{3}=144\sqrt{3}\Rightarrow h=6\sqrt{3}$. Din AC=12 cm şi teorema lui Pitagora în triunghiul VOA, obţinem $VA=VC=AC=12$ cm. ($AC\cap BD=\{O\}$). *b)* Apotema piramidei este egală cu $3\sqrt{14}$ cm. $A_l=72\sqrt{7}\,\text{cm}^2$. **65.** *a)* Apotema piramidei este egală cu 10 cm. $A_l=240\text{cm}^2$. *b)* $A_{DMN}=A_{ABCD}-A_{ADN}-A_{DCM}-A_{BMN}=63\text{cm}^2$. **66.** *a)* $A_t=(L+l+h)^2-(L^2+l^2+h^2)=144\text{cm}^2$. *b)* $P=2(4\sqrt{2}+7)$cm. **67.** *a)* $A_t=6\cdot l^2=96\text{cm}^2$. *b)* $AN=\sqrt{17}$ cm, $AM=5$cm, $MN=6$cm $\Rightarrow P_{AMN}=11+\sqrt{17}$ cm. **68.** *a)* Din proprietatea unghiului de 30° aplicată în triunghiul $A'BC$ obţinem $A'C=12$ cm. Cu teorema lui Pitagora triunghiul $AA'C$ obţinem $AA'=6$ cm. *b)* $A_t=36+108\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **69.** *a)* $g=6\sqrt{2}$ cm. *b)* $V=312\pi\text{ cm}^3$. **70.** *a)* 8 cm; *b)* Trunchi de con: $A_t=267\pi\text{ cm}^2$, $V=228\pi\text{ cm}^3$; con: $A_t=216\pi\text{ cm}^2$, $V=324\pi\text{ cm}^3$.

Capitolul 3. Variante de subiecte

Tema 3.1 Subiecte date la Evaluarea Naţională în anii 2010 – 2015

Testul 1 Evaluarea Naţională 2015 (25 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	0	5p
2.	6	5p
3.	5	5p
4.	24	5p
5.	90	5p
6.	3	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic	4p
	Notează paralelipipedul dreptunghic	1p
2.	$m_a = \frac{40+80}{2} =$ $= 60$ Se acordă punctajul maxim şi în cazul în care candidaţii au luat în considerare şi multiplii negativi de două cifre, iar media aritmetică este calculată corect	3p 2p
3.	În cele două zile Mihai a cheltuit $x+35$, unde x este suma cheltuită în prima zi $\frac{30}{100}\cdot(x+35)=x$ $x = 15$ lei	1p 2p 2p
4.a)	$f(-2) = -2+2 =$ $= 0$	3p 2p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f Trasarea graficului funcţiei f	2p 2p 1p
5.	$x^2-49=(x-7)(x+7)$, $x^2-7x=x(x-7)$ si $x^2+x=x(x+1)$ $E(x)=\frac{(x-7)(x+7)}{x(x-7)}-\frac{2x+7}{x(x+1)}\cdot\frac{x+1}{1}=\frac{x+7}{x}-\frac{2x+7}{x}=\frac{-x}{x}=-1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_{ABCD} = 150\cdot 100 =$ $= 15\,000\,\text{m}^2 = 1{,}5$ ha	2p 3p
b)	$DM = 50$ m, $DN = 100$ m, $CN = 50$ m $DM = CN$, $DN = CB \Rightarrow \Delta MND \equiv \Delta NBC(CC) \Rightarrow MN = NB$, deci ΔMNB este isoscel	3p 2p
c)	$\sphericalangle DMN \equiv \sphericalangle CNB$ şi $m(\sphericalangle MND)+m(\sphericalangle DMN)=90^o \Rightarrow m(\sphericalangle MND)+m(\sphericalangle CNB)=90^o$ $m(\sphericalangle MNB)=180^o-(m(\sphericalangle MND)+m(\sphericalangle CNB))=90^o$	3p 2p

2.	$AM = 3$ dm	2p
a)	$VM^2 = VA^2 - AM^2 \Rightarrow VM = 6$ dm	3p
b)	$A_{laterală} = \frac{P_{ABCD}\cdot VM}{2} = 72\,\text{dm}^2$	3p
	Cantitatea de vopsea necesară pentru vopsirea suprafeţei laterale este $72\cdot 30 = 2160$ g	2p
c)	$AD \subset (VAD)$, $BC \subset (VBC)$ şi $AD \parallel BC \parallel d$, unde $d = (VAD)\cap(VBC)$	1p
	N este mijlocul lui $(BC) \Rightarrow VN \perp BC$ şi cum $VM \perp AD$, obţinem $m(\sphericalangle((VAD),(VBC))) = m(\sphericalangle(VM,VN))$	2p
	ΔVMN echilateral $\Rightarrow \sin(\sphericalangle MVN) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p

Testul 2 Evaluarea Naţională 2015, subiect de rezervă (25 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	0	5p
2.	15	5p
3.	10	5p
4.	5	5p
5.	4	5p
6.	19	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic	4p
	Notează paralelipipedul dreptunghic	1p
2.	$m_g = \sqrt{(8-2\cdot 3)\cdot 2^3} = \sqrt{2\cdot 2^3} =$ $= 4$	3p 2p
3.	Numărul fetelor reprezintă $100\% - 40\% = 60\%$ din numărul elevilor clasei Numărul fetelor din clasă este egal cu $\frac{60}{100}\cdot 30 = 18$	2p 3p
4. a)	$f(3) = 3-3 =$ $= 0$	3p 2p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f Trasarea graficului funcţiei f	2p 2p 1p
5.	$E(n) = (3n+7-1)^2 =$ $= (3n+6)^2 = 9(n+2)^2$, care este pătrat perfect divizibil cu 9, pentru orice număr natural n	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$L_{cerc} = 2\pi R =$ $= 2\pi\cdot 5 = 10\pi$ m	2p 3p
b)	Triunghiul ABC este dreptunghic în $B \Rightarrow (AC)$ diametru, deci $AC = 2AO = 10$ m,	3p

	de unde $BC^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$ m $P_{ABCD} = 2(8+6) = 28$ m	2p
c)	$A_{gazon} = A_{disc} - A_{ABCD} = (25\pi - 48)$ m^2 $\pi < 3{,}15 \Rightarrow 25\pi < 78{,}75 \Rightarrow 25\pi - 48 < 30{,}75$, deci $A_{gazon} < 30{,}75$ m^2	2p 3p
2.a)	$A_{\Delta VBC} = \frac{BC \cdot VM}{2} =$ $= \frac{12 \cdot 6}{2} = 36$ cm^2	2p 3p
b)	$OM = \frac{1}{3}AM = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow VO = 2\sqrt{6}$ cm $A_{\Delta ABC} = 36\sqrt{3}$ cm$^2 \Rightarrow V_{piramida} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{3} = 72\sqrt{2}$ cm^3	2p 3p
c)	M este mediană în ΔVBC și $VM = \frac{BC}{2} \Rightarrow \Delta VBC$ este dreptunghic în V $VABC$ este piramidă triunghiulară regulată, deci $VA \perp VB$ și $VA \perp CV$ și cum $\{V\} = VB \cap CV$, obținem $VA \perp (VBC)$. Deoarece $VM \subset (VBC)$, obținem $VA \perp VM$	2p 3p

Testul 3 Evaluarea Națională 2015, sesiunea specială (10 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	0	5p
2.	50	5p
3.	2	5p
4.	6	5p
5.	5	5p
6.	12	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$m_a = \frac{1+7}{2} =$ $= 4$	3p 2p
3.	$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3}$ $\frac{4x}{3} - x = 14$, deci $x = 42$ și $y = 56$	2p 3p
4. a)	$f(5) = 5 - 5 =$ $= 0$	3p 2p
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției f Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției f Trasarea graficului funcției f	2p 2p 1p

5.	$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$ si $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ $E(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x+1}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_{ABCD} = \frac{(8+6) \cdot 2\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{14 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$ dm^2	2p 3p
b)	$AB \parallel CD$ și $CD \parallel EF \Rightarrow AB \parallel EF$ și cum $AB = EF$, obținem $ABFE$ paralelogram $BF = AE = 2AD = 4\sqrt{3}$ dm	3p 2p
c)	$CM = CP = 2\sqrt{3}$ dm și $BM = FP = 2$ dm, unde $M \in (AB)$, $P \in (EF)$ și $C \in (MP)$ astfel încât $MP \perp CD$, deci $\Delta CMB \equiv \Delta CPF$(CC) $tg(\sphericalangle BCM) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle FCP) = 30^\circ$, deci $m(\sphericalangle BCF) = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$	2p 3p
2.a)	$P_{ABCD} = 4 \cdot AB =$ $= 4 \cdot 8 = 32$ m	3p 2p
b)	M este mijlocul segmentului BC și $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow \Delta VMO$ dreptunghic în O, de unde obținem $VM = 4\sqrt{2}$ m $A_{laterală} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 64\sqrt{2}$ m^2	2p 3p
c)	$(VBC) \cap (ABC) = BC$, $VM \perp BC$, $VM \subset (VBC)$ si $OM \perp BC$, $OM \subset (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\sphericalangle((VBC), (ABC))) = m(\sphericalangle VMO)$ ΔVMO dreptunghic în O, $VO = 4$m, $OM = 4$m $\Rightarrow m(\sphericalangle VMO) = 45^\circ$	3p 2p

Testul 4 Evaluarea Națională 2015, simulare oficială (24 februarie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	3	5p
2.	18	5p
3.	7	5p
4.	120	5p
5.	12	5p
6.	80	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic	4p
	Notează paralelipipedul dreptunghic	1p
2.	$\overline{abc}$ este divizibil cu 5, deci $c = 0$ sau $c = 5$	1p
	Dacă $c = 0$, atunci $a + b = 22$, ceea ce este imposibil deoarece a și b sunt cifre	1p
	Dacă $c = 5$, atunci $a + b = 17 \Rightarrow a = 8$, $b = 9$ sau $a = 9$, $b = 8$, deci numerele sunt 895 și 985	3p

3.	În prima zi elevul citește $47\% \cdot x = \frac{47x}{100}$, unde x este numărul de pagini ale cărții	2p
	$\frac{47x}{100} + 53 = x$, de unde obținem $x = 100$ de pagini	3p
4. a)	$x = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = 2\sqrt{2}$	3p
	$x \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 4$	2p
b)	$y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3$	2p
	$x^2 - y = (2\sqrt{2})^2 - 3 = 5$	3p
5.	$(x^2+x+1)^2 - (x^2+x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$	3p
	$E(x) = x^2 + 2x + 1$	1p
	$E(n) = (n+1)^2$, pentru orice n număr natural	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$EM = 3$ hm și $FM = 3$ hm, unde $FM \perp AB$ și $M \in (AB)$	2p
	$EF = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ hm	3p
b)	ΔEMF este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle FEM) = 45^\circ$, de unde obținem $m(\sphericalangle EFD) = 45^\circ$	2p
	ΔDPF este dreptunghic isoscel $\Rightarrow PD = PF$	1p
	$EP + PD = EP + PF = EF$, deci traseul $E \to P \to D$ și aleea EF au aceeași lungime	2p
c)	$DF = BE$ și $\sphericalangle PFD \equiv \sphericalangle QEB \Rightarrow \Delta PFD \equiv \Delta QEB(IU)$, deci $DP = BQ$	3p
	Cum $DP \perp EF$ și $BQ \perp EF$, obținem $DP \parallel BQ$, deci $DPBQ$ este paralelogram	2p
2.a)	$BE = BF = 4$ cm	2p
	$A_{\Delta BEF} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ cm^2	3p
b)	$\{O\} = AC \cap BD, VO \perp (ABC)$ și $D \in (ABC) \Rightarrow m(\sphericalangle(VD,(ABC))) = m(\sphericalangle(VD,DO)) = m(\sphericalangle VDO)$	2p
	$BD = 8\sqrt{2} \Rightarrow \Delta VBD$ dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle VDO) = 45^\circ$	3p
c)	$BE = BF$, $\sphericalangle MBE \equiv \sphericalangle MBF$ și MB latură comună $\Rightarrow \Delta MEB \equiv \Delta MFB(LUL)$	2p
	$m(\sphericalangle BMF) = 90^\circ$, deci $FM \perp VB$ și cum $EM \perp VB$ și $FM \cap EM = \{M\} \Rightarrow VB \perp (EMF)$	3p

Testul 5 Evaluarea Națională 2015, model subiect www.edu.ro

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	60	5p
2.	40	5p
3.	2	5p
4.	25	5p
5.	36	5p
6.	20	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul	4p
	Notează paralelipipedul	1p
2.	$x = 8 - 2\sqrt{7}$	2p
	$m_a = \frac{(8 - 2\sqrt{7}) + 2\sqrt{7}}{2} = 4$	3p
3.	În prima zi parcurge $30\% \cdot x = \frac{3x}{10}$, unde x este lungimea întregului traseu	2p
	$\frac{3x}{10} + 350 = x \Rightarrow x = 500$ km	3p
4.a)	$f(-3) = (-3) \cdot a + 3$	2p
	$-3a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1$	3p
b)	$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow OA = 3$	2p
	$f(0) = 3 \Rightarrow OB = 3 \Rightarrow \Delta OAB$ este isoscel	3p
5.	$(x+1)^2 - 4 = (x-1)(x+3)$ si $x^2 - x = x(x-1)$	2p
	$E(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x} \cdot \frac{x^2}{x(x-1)} = x + 3$	2p
	$m + 3 = 5 \Leftrightarrow m = 2$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_{ABCD} = 30\sqrt{3} \cdot 30 =$	3p
	$= 900\sqrt{3}$ m^2	2p
b)	$MN \parallel AC$ si $MQ \parallel BD \Rightarrow m(\sphericalangle NMQ) = m(\sphericalangle COD)$, unde O este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$	2p
	$AC = BD = 60$m $\Rightarrow OD = OC = CD \Rightarrow \Delta ODC$ este echilateral de unde $m(\sphericalangle NMQ) = 60^\circ$	3p
c)	$MN \parallel AC \Rightarrow \Delta BMN \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC} \Rightarrow MN = 20$m	1p
	$MQ \parallel BD \Rightarrow \Delta AMQ \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD} \Rightarrow MQ = 40$m	2p
	$MNPQ$ paralelogram $\Rightarrow MN + NP + PQ + QM = 2(MN + MQ) = 120$m	2p
2.a)	$AO = 9$ cm $\Rightarrow A_{bazei} = 81\pi$ cm^2	3p
	$V_{con} = \frac{81\pi \cdot 12}{3} = 324\pi$ cm^3	2p
b)	Notăm cu α planul bazei conului: $VO \perp \alpha \Rightarrow m(\sphericalangle(VA,\alpha)) = m(\sphericalangle VAO)$	2p
	$\sin(\sphericalangle VAO) = \frac{VO}{VA} = \frac{4}{5}$	3p
c)	$\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r = 3$ cm, unde r este raza secțiunii	2p
	$\frac{VO'}{VO} = \frac{r}{AO}$, unde VO' este distanța de la punctul V la planul de secțiune, de unde $VO' = 4$cm	3p

Testul 6 Evaluarea Naţională 2014 (25 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	0	5p
2.	20	5p
3.	8	5p
4.	24	5p
5.	48	5p
6.	13	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma cu bază triunghi	4p
	Notează prisma	1p
2.	$a=9,\ b=4$	3p
	$m_g=\sqrt{9\cdot 4}=6$	2p
3.	Ion a parcurs în prima zi $\frac{20}{100}\cdot d=\frac{d}{5}$, unde d este lungimea drumului	1p
	Ion a parcurs în a doua zi $\frac{30}{100}\cdot\left(d-\frac{20}{100}\cdot d\right)=\frac{6d}{25}$	2p
	$\frac{d}{5}+\frac{6d}{25}=560=d\Rightarrow d=1000$ km	2p
4.a)	$f(2)=2-2=$	2p
	$=0$	3p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	3p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
5.	$x^2+4x+4=(x+2)^2$	2p
	$1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}\Rightarrow E(x)=\frac{(x+2)^2}{x(x+2)}\cdot\frac{x}{x+2}=1$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$P_{\Delta AOD}=3\cdot AD=$	2p
	$=6$ m	3p
b)	$m(\sphericalangle OBC)=m(\sphericalangle OCB)=30^\circ$	2p
	$BM=1$ m, unde punctul M este mijlocul segmentului BC	1p
	$OM=\frac{\sqrt{3}}{3}$ m	2p
c)	$AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m $\Rightarrow P_{ABCD}=\frac{12+8\sqrt{3}}{3}$ m	3p
	$\frac{12+8\sqrt{3}}{3}<9\Leftrightarrow 8\sqrt{3}<15\Leftrightarrow\sqrt{192}<\sqrt{225}$ adevărat	2p
2. a)	$V_{cutie}=20\cdot 20\cdot 10=$	3p
	$=4000\,\text{cm}^3$	2p
b)	$A_{ABCD}=400\ \text{cm}^2$ şi $A_{laterală}=800\ \text{cm}^2\Rightarrow A_{totală}=1600\ \text{cm}^2$	3p
c)	Au fost folosiţi pentru confecţionarea cutiei $\frac{110}{100}\cdot 1600=1760\ \text{cm}^2$ de carton	2p
	$CM\perp BO\Rightarrow CM\cdot BO=d(O,BC)\cdot BC$	2p
	$BO=10\sqrt{3}$ şi $d(O,BC)=10\sqrt{2}\Rightarrow CM=\frac{20\sqrt{6}}{3}$ cm	3p

Testul 7 Evaluarea Naţională 2014, subiect de rezervă (25 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	0	5p
2.	4	5p
3.	3	5p
4.	6	5p
5.	125	5p
6.	40	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida patrulateră	4p
	Notează piramida patrulateră	1p
2.	$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$	3p
	$a=3$	23p
3.	$22x+21(20-x)=428$, unde x este numărul rândurilor cu 22 de scaune	2p
	$x=8$	3p
4. a)	$f(1)=-1+1=$	2p
	$=0$	3p
b)	$OM=1,\ ON=1$	2p
	ΔOMN dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle OMN)=45^\circ$	3p
5.	$\frac{x-2}{x^2-4}\cdot\frac{5x+10}{x-3}=\frac{5}{x-3}$	3p
	$E(x)=\left(\frac{5}{x-3}+1\right)\cdot\frac{x-3}{x+2}=1$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$P_{ABCD}=2(AB+BC)=$	2p
	$=80$ m	3p
b)	$AM=CN=20$ m	1p
	$A_{AMND}=\frac{(AM+DN)\cdot AD}{2}=150\ \text{m}^2$	2p
	$A_{CNMB}=\frac{(CN+BM)\cdot BC}{2}=150\ \text{m}^2\Rightarrow A_{AMND}=A_{CNMB}$	2p
c)	$MN=10\sqrt{2}$ m	2p
	Sunt 9 stâlpi, deci distanţa dintre doi stâlpi consecutivi este $10\sqrt{2}:8$	1p
	$10\sqrt{2}:8>1,75\Leftrightarrow 10\sqrt{2}>14\Leftrightarrow 200>196$ adevărat	2p

2.a)	Distanța de la C la AB este egală cu înălțimea triunghiului echilateral ΔABC $d(C,AB)=\sqrt{AC^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=3\sqrt{3}$ m	**2p** **3p**
b)	$A_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$ m^2 $V_{prismă}=AD\cdot A_{\Delta ABC}=90\sqrt{3}$ m^3	**2p** **3p**
b)	Aria suprafețelor acoperite cu tablă este $2\cdot A_{BEFC}=120$ m^2 S-au cumpărat $\frac{110}{100}\cdot 120=132$ m^2 de tablă	**2p** **3p**

Testul 8 Evaluarea Națională 2014, sesiunea specială (12 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	28	**5p**
2.	18	**5p**
3.	10	**5p**
4.	30	**5p**
5.	120	**5p**
6.	2	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	**4p**
	Notează cubul	**1p**
2.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$	**3p**
	$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$	**2p**
3.	$\frac{60}{100}\cdot x+80=x$, unde x este prețul cadoului	**2p**
	$x=200$ de lei	**3p**
4.	$f(1)=1-1=$	**3p**
a)	$=0$	**2p**
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției	**2p**
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției	**2p**
	Trasarea graficului funcției	**1p**
5.	$\frac{(x+2)^2}{x^2+4}-1=\frac{4x}{x^2+4}$	**3p**
	$E(x)=\frac{4x}{x^2+4}\cdot\frac{x^2+4}{x}=4$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$P_{ABCD}=2(AB+AD)=$	**2p**
	$=24$ m	**3p**
b)	$MN=PQ=\frac{AC}{2}$, $NP=MQ=\frac{BD}{2}$ și cum $AC=BD\Rightarrow MNPQ$ romb	**2p**
	$A_{haşurată}=A_{MNPQ}=\frac{MP\cdot NQ}{2}=\frac{AD\cdot AB}{2}=\frac{1}{2}A_{ABCD}\Rightarrow A_{haşurată}=A_{gazon}$	**3p**

c)	$A_{haşurată}=16$ m^2	**2p**
	Suma cheltuită pentru cumpărarea florilor plantate în grădină este $16\cdot 25\cdot 2{,}5=1000$ de lei	**3p**
2.*a)*	$A_{ABCD}=AB^2=$	**2p**
	$=36$ dm	**3p**
b)	Apotema piramidei este $a_p=5$ dm	**2p**
	$A_{laterală}=\frac{P_{bazei}\cdot a_p}{2}=\frac{4\cdot 6\cdot 5}{2}=60$ dm^2	**3p**
c)	$V_{prismă}=3\cdot V_{piramidă}\Rightarrow V_{lemn\ îndepărtat}=V_{prismă}-V_{piramidă}=2\cdot V_{piramidă}$	**3p**
	$V_{piramidă}=\frac{p}{100}\cdot V_{lemn\ îndepărtat}\Rightarrow p=50$, deci volumul piramidei reprezintă 50% din volumul lemnului îndepărtat	**2p**

Testul 9 Evaluarea Națională 2014, simulare (19 februarie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	1	**5p**
2.	$\frac{8}{3}$	**5p**
3.	$[-5,3]$	**5p**
4.	9	**5p**
5.	90	**5p**
6.	78	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma dreaptă cu baza triunghiul ABC	**4p**
	Notează prisma	**1p**
2.	Din teorema împărțirii cu rest avem $n=6c_1+1$ și $n=8c_2+1$	**2p**
	$n-1=6c_1=8c_2\Rightarrow n-1$ este multiplu de 6 și de 8	**1p**
	c.m.m.m.c.$\{6,8\}=24\Rightarrow n-1$ este multiplu de 24	**1p**
	Cum $40<n<50$, obținem $n=49$	**1p**
3.	$S-\frac{2}{5}\cdot S-13=8$, unde S este suma pe care o avea Matei sâmbătă dimineața	**2p**
	S = 35 lei	**3p**
4.	$a=2\sqrt{2}$	**2p**
a)	$\frac{a+2}{a-2}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)}=b$	**3p**
b)	$b=3+2\sqrt{2}$	**3p**
	$2\sqrt{2}<3+2\sqrt{2}\Rightarrow a<b$	**2p**

5.	$(1+x)(1-x)=1-x^2$ $(x+2)^2=x^2+4x+4$ $E(x)=2x+1$ $E(a)=-1\Rightarrow a=-1$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.-a)	$AB=2\cdot 5=10$ cm $P_{ABCD}=4\cdot AB=40$ cm	3p 2p
b)	Tabla de joc din *Figura 2* are 25 de pătrate dintre care 12 pătrate sunt albe $\frac{12}{25}=\frac{48}{100}=48\%$	2p 3p
c)	$AP=BQ=CM=DN$, $AN=BP=CQ=DM$, $\sphericalangle A\equiv\sphericalangle B\equiv\sphericalangle C\equiv\sphericalangle D$ $\Delta NAP\equiv\Delta PBQ\equiv\Delta QCM\equiv\Delta MDN\Rightarrow NP=PQ=QM=MN\Rightarrow$ $\Rightarrow MNPQ$ romb $\Rightarrow MP\perp NQ$	2p 3p
2.-a)	$OA=3\sqrt{2}$ m $AC=6\sqrt{2}\Rightarrow AB=6$ m	2p 3p
b)	$(VAC)\cap(VBD)=VO$, $AC\perp VO$ şi $AC\subset(VAC)$, $BD\perp VO$ şi $BD\subset(VBD)$ $m(\sphericalangle((VAC),(VBD)))=m(\sphericalangle(AC,BD))=90^\circ$	3p 2p
c)	MN linie mijlocie în triunghiul $VBC\Rightarrow MN\parallel BC$ $BC\parallel AD\Rightarrow MN\parallel AD\Rightarrow$ punctele A,D,N şi M coplanare, deci DM şi AN sunt coplanare	2p 3p

Testul **10** Evaluarea Naţională 2014, Test 1 pregătire suplimentară, MEN

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{12}{11}$	5p
2.	4	5p
3.	17	5p
4.	10π	5p
5.	60	5p
6.	70	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma cu baza triunghi echilateral Notează prisma	4p 1p
2.	$2x-1$ este divizor al lui 11 $x=-5$ sau $x=0$ sau $x=1$ sau $x=6$	3p 2p
3.	$x-10\%\cdot x=162$, unde x este preţul iniţial al bluzei $x=180$ de lei	2p 2p 3p
4.-a)	$f(1)=p+q\Rightarrow p+q=1$ şi $f(2)=2p+q\Rightarrow 2p+q=-1$ $p=-2$ şi $q=3$	3p 2p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f Trasarea graficului funcţiei	2p 1p 2p
5.	$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$ şi $x^2-25=(x-5)(x+5)$ $E(x)=\frac{2x-8-x+5}{(x-3)(x-5)}\cdot(x-5)(x+5)=x+5$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.-a)	$BC=\frac{3}{4}\cdot AB$	2p
	$AB\cdot\frac{3}{4}\cdot AB=48\Rightarrow AB=8$ m	3p
b)	$A_{MNPD}=1$ m$^2\Rightarrow A=A_{incăpere}-A_{MNPD}=47$ m^2	3p
	Sunt necesari $47+10\%\cdot 47=51{,}7$ m^2 de parchet	2p
c)	$51{,}7:2{,}5=20{,}68$ deci sunt necesare 21 de cutii cu parchet	3p
	$135\cdot 21=2835$ de lei	2p
2.-a)	$V_{apă}=8\cdot 8\cdot 4=256$ dm^3	3p
	256 dm^3 = 256 de litri	2p
b)	$A_{laterală}=160$dm$^2=1{,}6$m^2	3p
	$100\cdot 1{,}6=160$ m^2 de sticlă	2p
c)	Cea mai mare distanţă dintre două puncte ale paralelipipedului dreptunghic determinat de apă este lungimea diagonalei d a acestuia $d=12$ dm	2p 3p

Testul **11** Evaluarea Naţională 2014, Test 2 pregătire suplimentară, MEN

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	12	5p
2.	5	5p
3.	2	5p
4.	13	5p
5.	$64\sqrt{3}$	5p
6.	al II-lea	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma cu baza pătrat Notează prisma	4p 1p
2.	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{7})^2=8+3\sqrt{7}\Rightarrow a=16$ $m_a=\frac{16+24}{2}=20$	3p 2p 2p
3.	$f+b=120$, unde f este numărul femeilor şi b este numărul bărbaţilor $f=20\%\cdot b\Rightarrow b=100$	3p 2p
4.-a)	$2a+3=7$ $a=2$	3p

b)	$G_f \cap Ox = \{A\} \Rightarrow OA = \frac{3}{2}$	2p
	$G_f \cap Oy = \{B\} \Rightarrow OB = 3$	1p
	$A_{\Delta AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{9}{4}$	2p
5.	$(x+4)(3x-2) = 3x^2 + 10x - 8$ şi $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$	2p
	$E(x) = \frac{4x}{4x^3(x+1)} \cdot \frac{x^2(x+1)}{1} = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$R = 5$ m	
	Lungimea gardului este egală cu $2 \cdot L_{cerc} = 2 \cdot 2\pi \cdot 5 = 20\pi$ m	2p
b)	$A_{disc} = \pi \cdot 5 = 25\pi$ m^2	3p
	$A_{ABCD} = 10^2 = 100$ m^2 $\Rightarrow A_{teren} = 50(\pi + 2)$ m^2	2p
c)	$1028 \cdot 25 = 25700$ dm^2 $= 257$ m^2	3p
	$3{,}14 < \pi \Rightarrow 5{,}14 < \pi + 2 \Rightarrow 257$ m^2 $< A_{teren}$, deci pe teren pot fi plantaţi 1028 de trandafiri	2p
2.a)	$A_{totală\ cutie} = 2(60 \cdot 40 + 60 \cdot 50 + 40 \cdot 50) = 14800$ cm^2 $=$	2p
	$= 1{,}48$ m^2	3p
b)	$V_{cutie} = 120000$ cm^3 şi $V_{cub} = 1000$ cm^3	2p
	În cutie încap cel mult $120000 : 1000 = 120$ de cuburi, deci nu încap 125 de cuburi	2p
c)	Cea mai mică distanţă dintre punctele A şi C' este lungimea diagonalei unui dreptunghi cu dimensiunile de $60 + 40 = 100$ cm şi 50 cm	3p
	Lungimea minimă a benzii aplicate este egală cu $50\sqrt{5}$ cm	2p
		3p

Testul 12 Evaluarea Naţională 2014, Test 3 pregătire suplimentară, MEN

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	4	5p
2.	2	5p
3.	12	5p
4.	36	5p
5.	12	5p
6.	16	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	De la punctul de întâlnire, vaporul mai are de parcurs distanţa pe care a parcurs-o şalupa	2p
	Şalupa a făcut 5 ore, vaporul mai face 10 ore, deci vaporul ajunge la ora $12 + 10 = 22$	3p
3.	După cumpărarea caietelor i-au rămas $S - \left(\frac{1}{2}S + 1\right) = \frac{1}{2}S + 1$, unde S este suma iniţială	1p
	Cartea a costat $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S + 1\right) + 5$	1p
	$\frac{1}{2}S - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S + 1\right) + 5 + 29 = S \Rightarrow S = 100$ de lei	3p
4.	Reprezentarea corectă a unui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
a)	Reprezentarea corectă a altui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
b)	$T(a, 2a+4) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = 2a + 4$	2p
	$3a - 2 = 2a + 4 \Rightarrow a = 6$	3p
5.	$(x\sqrt{3} + 1)^2 = 3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1$ şi $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$	2p
	$E(x) = x^2 + 3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 - 4x^2 + 4x - 1 - 2x\sqrt{3} - 4x = 0$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$AM \perp BD$ şi $M \in (BD) \Rightarrow \Delta AMD$ dreptunghic în $M \Rightarrow DM = 18$ m	2p
	ΔABD dreptunghic în $A \Rightarrow AD^2 = DM \cdot BD \Rightarrow BD = 50$ m	3p
b)	$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD} = 24 \cdot 50 = 1200$ m^2 şi 1 ha $= 10000$ m^2	2p
	$p\% \cdot 10000 = 1200 \Rightarrow$ aria terenului reprezintă 12% dintr-un hectar	3p
c)	EF mediatoarea lui $BD \Rightarrow EF \parallel AM$	2p
	$\frac{EO}{AM} = \frac{BO}{BM} \Rightarrow EO = \frac{25 \cdot 24}{32} = 18{,}75 \Rightarrow EF = 37{,}5$ m	3p
2.a)	$V_{piscină} = 50 \cdot 25 \cdot 2{,}5 = 3125$ m^3 $=$	3p
	$= 3125000$ de litri	2p
b)	$A_{laterală\ piscină} = 2 \cdot (50 + 25) \cdot 2{,}5 = 375$ m^2	2p
	$A_{placă} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ m^2, deci numărul minim de plăci este egal cu $375 : 0{,}25 = 1500$	3p
c)	Punctele de pe marginea superioară a bazinului, situate la cea mai mică distanţă faţă de centrul bazei $ABCD$ a piscinei, sunt mijloacele laturilor $A'B'$ şi $C'D'$	2p
	Distanţa minimă este egală cu $\sqrt{12{,}5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{162{,}5} < \sqrt{169} = 13m$	3p

Testul 13 Evaluarea Naţională 2014 (25 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	103	5p
2.	$(-\infty, 3]$	5p
3.	2	5p
4.	9	5p
5.	90	5p
6.	75	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida cu baza triunghi	4p

	Notează piramida	1p
2.	$22 = 4 \cdot b + r$, $r \in \{2, 6, 10, 14, 18\}$, unde b este numărul de bomboane primite de fiecare copil și r este numărul de bomboane rămase în cutie	2p
	Numărul minim de bomboane care rămân în cutie este 2	2p
3.	$ab = 16$ și $\frac{a}{b} = 4$, unde a și b sunt cele două numere	2p
	$a = 8$ și $b = 2$	3p
4. a)	$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 3 \cdot 5 =$	3p
	$= 15$	2p
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției f	1p
5.	$(x\sqrt{2}+1)^2 = 2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1$ și $(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1) = 2x^2 - 1$	2
	$E(x) = 2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1 - 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{2} = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_{ABCD} = 800\text{m}^2$, $A_{EFGH} = 800\text{m}^2$ și $A_{MCYNE} = 100\text{m}^2$	3p
	Aria suprafeței terasei este egală cu $800 + 800 - 100 = 1500\ \text{m}^2$.	2p
b)	$1500 \cdot 3 = 4500\ \text{m}^2$	2p
	10% din $4500 = 450\ \text{m}^2$, deci $4500 + 450 = 4950\ \text{m}^2$ de folie sunt necesari efectuării lucrării	3p
c)	Cea mai mare distanță dintre două puncte oarecare ale terasei este egală cu AG, care este diagonală în dreptunghiul $APGQ$, unde $\{P\} = AB \cap FG$ și $\{Q\} = AD \cap GH$	2p
	$AP = 30$, $PG = 70 \Rightarrow AG = 10\sqrt{58} < 10\sqrt{64} \Rightarrow AG < 80\,\text{m}$	3p
2. a)	$A_{\text{unei fețe}} = 3600\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{\text{totală}} = 6 \cdot 3600 = 21600\ \text{cm}^2$	3p
b)	$V_{\text{cutie}} = 216000\ \text{cm}^3$	2p
	$V_{\text{cubuleț}} = 64\ \text{cm}^3$, deci numărul maxim de cubulețe este egal cu $216000 : 64 = 3375$	3p
c)	ΔABP este dreptunghic isoscel cu $AP = BP = 30\sqrt{2}$ cm, unde $AP \perp BN$, $P \in BN$	2p
	În ΔAPN dreptunghic, AN este ipotenuză $\Rightarrow AN > AP = 30\sqrt{2}$ cm	3p

Testul 14 Evaluarea Națională 2014, subiect de rezervă (25 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	2	5p
2.	4	5p
3.	15	5p
4.	$\sqrt{3}$	5p
5.	66	5p
6.	2	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma cu baza triunghi echilateral	4p
	Notează prisma	1p

2.	$a = \sqrt{5} - \sqrt{8} + 1$ și $b = \sqrt{5} + \sqrt{8} + 5$	2p
	$a + b = \sqrt{5} - \sqrt{8} + 1 + \sqrt{5} + \sqrt{8} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$	3p
3.	$\frac{x}{2} + \frac{9}{2} = 2x$	2p
	$x = 3$	3p
4. a)	Reprezentarea corectă a punctului $(-1, -5)$ care aparține graficului funcției f	2p
	Reprezentarea corectă a punctului $(0, -2)$ care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	$a = 3$ și $b = -2$	2p
	$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$	2p
		1p
5.	$2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$ și $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$	3p
	$\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9} = \frac{2x - 1}{x + 3}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$P_{romb} = 4 \cdot 4 =$	3p
	$= 16$ dam	2p
b)	ΔAMD dreptunghic în M, unde $DM \perp AB$ și $M \in AB \Rightarrow \sin(\sphericalangle MAD) = \frac{DM}{AD}$	2p
	$\frac{1}{2} = \frac{DM}{4} \Rightarrow DM = 2$ dam	3p
c)	$A_{romb} = AB \cdot DM = 8 \Rightarrow l^2 = 8 \Rightarrow l = 2\sqrt{2}$ dam, unde l este latura pătratului	2p
	Diagonala pătratului este $l\sqrt{2} = 4 = AB$	3p
2.a)	Apotema piramidei este de 24 m	2p
	$A_{laterală} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 24}{2} = 960\ \text{m}^2$	3p
b)	$BE \perp CV$	2p
	$\Delta BEC \equiv \Delta DEC \Rightarrow \sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle BEC \Rightarrow DE \perp CV$	3p
c)	$BE = \frac{240}{13} \Rightarrow CE = \frac{100}{13}$ m	2p
	$BE \perp CM$, $CE = EM \Rightarrow MB = CB = 20\,\text{m}$	2p
	$\Delta BMC \equiv \Delta DMC \Rightarrow MB = MD \Rightarrow EM + DM = \frac{360}{13}$ m	1p

Testul 15 Evaluarea Națională 2014, sesiunea specială (12 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	28	5p
2.	6	5p
3.	2	5p
4.	25	5p
5.	36	5p
6.	10	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{7} + \frac{1}{3} + \frac{3}{7}}{2} =$	2p
	$= 1$	3p
3.	Se notează cu f numărul fetelor și cu b numărul băieților $\Rightarrow f + b = 27$	1p
	$b = \frac{80}{100} \cdot f$	2p
	$b = \frac{4}{5} \cdot (27 - b) \Rightarrow b = 12$	2p
4.	$f(-2) = -8$	2p
a)	$f(2) = 0$	2p
	$f(-2) + f(2) = -8$	1p
b)	$f(2) = 0 \Rightarrow A(2,0)$	1p
	$f(x) = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3,2)$	1p
	$A_{\Delta OAB} = 2$	3p
5.	$\frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$	2p
	$E(x) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. *a)*	$A_{lac} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 =$	2p
	$= 100\pi \text{m}^2$	3p
b)	$A_{\Delta ADP} = 200 \text{ m}^2$, $A_{\Delta PBM} = 50 \text{ m}^2$, $A_{\Delta DCM} = 150 \text{ m}^2$	3p
	$A_{\Delta DPM} = A_{ABCD} - A_{\Delta ADP} - A_{\Delta PBM} - A_{\Delta DCM} \Rightarrow A_{\Delta DPM} = 600 - 200 - 50 - 150 = 200 \text{ m}^2$	2p
c)	$A_{ABCD} = 600 \text{ m}^2 \Rightarrow A_{\text{suprafeței gazonului}} = (600 - 100\pi)\text{m}^2$	3p
	$(600 - 100\pi) - 100\pi = 200(3 - \pi) < 0$ pentru că $\pi > 3$, deci aria suprafeței acoperite cu gazon este mai mică decât aria suprafeței lacului	2p
2. *a)*	$OA = 2\sqrt{2}\text{m}$	2p
	$VA^2 = VO^2 + OA^2 \Rightarrow OV = 2\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow OA = OV$	3p
b)	Lungimea apotemei piramidei este egală cu $2\sqrt{3}$ m	2p
	$A_b = l^2 = 16 \text{ m}^2$	1p
	$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = 16\sqrt{3}\text{ m}^2$	1p
	$A_t = A_b + A_l = 16 + 16\sqrt{3} = 16(1 + \sqrt{3})\text{m}^2$	1p
c)	$d(O,(VBC)) = OM$ unde M este piciorul perpendicularei duse din O pe VN, iar N este mijlocul laturii BC	3p
	$OM = \frac{OV \cdot ON}{VN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\text{m}$	2p

Testul 16 Evaluarea Națională 2013 (27 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	26	5p
2.	15	5p
3.	9	5p
4.	32	5p
5.	27	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida triunghiular regulată	4p
	Notează piramida triunghiulară regulată	1p
2.	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	2p
	$\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$	3p
3.	Călin are $12 - 7 = 5$ mere	3p
	Ana are $8 - 5 = 3$ mere	2p
4.*a)*	$f(0) = 2$	2p
	$f(-2) = 0$	2p
	$f(0) + f(-2) = 2$	1p
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției	2p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
5.	$\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{(x-2)(x+2)}$	3p
	$E(x) = \frac{2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{2} = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	ΔABD este dreptunghic în $A \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$	2p
	$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 20\sqrt{3}$	3p
b)	$AC \cap BD = \{O\}$ și $ABCD$ dreptunghic	2p
	$\Rightarrow AO = OD = AD = 20m \Rightarrow \Delta AOD$ echilateral	2p
	$m(\sphericalangle AOD) = 60°$	2p
c)	$A_{ABCD} = AB \cdot AD = 400\sqrt{3} \ m^2$	3p
	$\sqrt{3} < 1{,}74 \Rightarrow 400\sqrt{3} < 400\sqrt{3} < 696 \Rightarrow$ aria locului de joacă este mai mică de 700 m^2.	3p
2.	$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(4 + 6) =$	2p
a)	$= 20$ dm	2p
b)	$A_{bazei} = 24 \ m^2$	2p
	$A_{laterală} = P_{ABCD} \cdot AA' = 160 \ m^2$	1p
	$A_{totală} = A_{laterală} + 2 \cdot A_{bazei} = 208 \ dm^2$	2p
c)	$AC = 2\sqrt{13}$ dm	3p
	PQ linie mijlocie în $\Delta AB'C \Rightarrow PQ = \frac{AC}{2} = \sqrt{13}$ dm	

Testul 17 Evaluarea Naţională 2013, subiect de rezervă (27 iunie)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	18	5p
2.	6	5p
3.	10	5p
4.	15	5p
5.	20	5p
6.	8	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$	2p
	$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$	
3.	$a + b = 10$ şi $a - b = 2$	3p
	$a = 6$ şi $b = 4$	2p
4.	$f(0) = 1$	3p
a)	$f(-1) = 0$	2p
	$f(0) + f(-1) = 1$	2p
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparţine graficului funcţiei	1p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparţine graficului funcţiei	2p
	Trasarea graficului funcţiei	2p
5.	$x - 1 - \frac{x^2}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}$	1p
	$E(x) = \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-2} = 1$	3p
		2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(8 + 6) =$	3p
	$= 28$ m	2p
b)	$A_{APM} = \frac{AM \cdot AP}{2} = 6$ m^2	2p
	$A_{MBCN} = \frac{(MB + NC) \cdot BC}{2} = 21$ m^2	2p
	$A_{gazon} = A_{\Delta APM} + A_{MBCN} = 27$ m^2	1p
c)	$A_{ABCD} = 48$ m^2	2p
	$A_{MNDP} = A_{ABCD} - A_{gazon} = 21$ m$^2 \Rightarrow A_{MNDP} = A_{MBCN}$	3p
2.*a)*	$P_{\Delta BCD} = 3 \cdot CD =$	3p
	$= 12$ cm	2p
b)	$a_p = \frac{CD}{2} = 2$ cm, unde a_p este apotema piramidei	2p
	$A_{laterală} = \frac{P_{\Delta BCD} \cdot a_p}{2} = 12$ cm^2	3p

b)	Înălţimea piramidei este egală cu $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm	1p
	$A_{\Delta BCD} = 4\sqrt{3}$ m^2	1p
	$v_{pietrei} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm$^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ ml	2p
	Din vas se varsă mai puţin de 4 ml de apă, deoarece $\frac{8\sqrt{2}}{3} < \frac{8 \cdot 1{,}5}{3} = 4$	1p

Testul 18 Evaluarea Naţională 2013, sesiunea specială (5 iunie)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	14	5p
2.	12	5p
3.	3	5p
4.	22	5p
5.	54	5p
6.	32	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează tetraedrul regulat	4p
	Notează tetraedrul regulat	1p
2.	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{12}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{2}$	2p
	$= 2$	3p
3.	10% din preţul produsului este $10\% \cdot 1000 = 100$ de lei	2p
	Preţul produsului după ieftinire este $1000 - 100 = 900$ de lei	3p
4.	$f(0) = -2$	2p
a)	$f(2) = 0$	2p
	$f(0) + f(2) = -2$	1p
b)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparţine graficului funcţiei	2p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparţine graficului funcţiei	2p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
5.	$\frac{x+1}{2x} - \frac{x-1}{3x} = \frac{x+5}{6x}$	3p
	$E(x) = \frac{x+5}{6x} \cdot \frac{6x}{x+5} = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$P_{ABCD} = 4 \cdot AB =$	2p
	$= 400$ m	3p
b)	$A_{ABCD} = 10000$ m^2	2p
	$A_{iaz} = \pi r^2 = 625\pi$ m^2	2p
	$A_{hasurată} = A_{ABCD} - A_{iaz} = (10000 - 625\pi) = 625(16 - \pi)$ m^2	

		1p
c)	$MN = 25$ m Un traseu parcurs are lungime $50(1+\pi)$ m, deci drumul parcurs zilnic este de $250(1+\pi)$ m $\pi > 3{,}14 \Rightarrow 250(1+\pi) > 1035 > 1000$, deci drumul parcurs într-o zi este mai mare decât 1000 m = 1 km	1p 2p 2p
2.a)	$A_{ABCD} = AB \cdot BC = 60 \cdot 24 =$ $= 1440$ cm^2	3p 2p
b)	$v_{ABCDEFGH} = L \cdot l \cdot h = 60 \cdot 24 \cdot 40 =$ $= 57600$ cm^3	2p 3p
c)	Fie $M \in (AE)$, $AM = 30$ cm $\Rightarrow v_{apă} = A_{ABCD} \cdot AM = 1440 \cdot 30 =$ $= 43200$ cm^2 $= 43{,}2$dm^3 $= 43{,}2$ litri	2p 2p

Testul 19 Evaluarea Naţională 2013, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	8	5p
2.	9	5p
3.	1	5p
4.	49	5p
5.	9	5p
6.	30	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic	4p
	Notează paralelipipedul dreptunghic	1p
2.	$a = 9 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9$ $b = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$ $\sqrt{ab} = 6$	2p 2p 1p
3.	Se notează cu a şi b numerele date $\Rightarrow \begin{cases} a+b = 1,(6) \\ a-b = 0,(3) \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = \frac{5}{3} \\ a-b = \frac{1}{3} \end{cases}$ Finalizare: $a = 1$ şi $b = \frac{2}{3}$	2p 1p 2p
4. a)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparţine graficului funcţiei Reprezentarea corectă a altui punct care aparţine graficului funcţiei Trasarea graficului funcţiei	2p 2p 1p
b)	$A(m,m) \in G_f \Rightarrow f(m) = m$ $m = 6$	3p 2p

5.	$x + 1 + \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x^2+1}{x-1}$ $\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x-1}{x^2+1}$ Finalizare	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Se notează L = lungimea şi l = lăţimea $\Rightarrow L = 2 \cdot l$ $L = 50$ m, $l = 25$ m $P = 2 \cdot (L + l) = 150m$	1p 2p 2p
b)	$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ $AC = 25\sqrt{5}$	3p 2p
c)	Lungimea traseului parcurs de Oana este egală cu $50\sqrt{5}$ m Lungimea traseului parcurs de Mihai este egală cu 150 m $150 > 50\sqrt{5}$ deoarece $3 = \sqrt{9} > \sqrt{5}$	2p 1p 2p
2.a)	$V_{cub} = l^3 = 1728$ cm^3 $V_{paralelipiped} = L \cdot l \cdot h = 1728\ cm^3$ Finalizare	3p 2p 1p
b)	$GS = 3$ cm $SQ = 20$ cm $QN = 15$ cm Lungimea traseului este egală cu 62 cm	1p 1p 1p 2p
c)	$1l = 1000$ cm^3 $144 \cdot h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{144}$ $\frac{1000}{144} < 7$	1p 3p 1p

Testul 20 Evaluarea Naţională 2012 (27 iunie)

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	15	5p
2.	15	5p
3.	$(-\infty, 2]$	5p
4.	16	5p
5.	150	5p
6.	12	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$b = \sqrt{5} + 1$	2p
	$\sqrt{ab} = 2$	3p

3.	Notând cu x numărul fetelor din clasă, rezultă că numărul băieților este egal cu $26-x$	1p
	$x-2=2\cdot(26-x-3)$	2p
	Finalizare: $x=16$	2p
4.*a)*	Reprezentarea unui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	$A(a,-a)\in G_f \Rightarrow f(a)=-a$	2p
	$-2a+3=-a \Rightarrow a=3$	3p
5.	$1+\dfrac{2-x}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}$	2p
	$\dfrac{x-1}{(2x+1)^2-(x+2)^2}=\dfrac{1}{3(x+1)}$	2p
	$E(x)=9$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$A_{laterală}=P_{bazei}\cdot h$	2p
	$A_{laterală}=1600\,\text{cm}^2$	3p
b)	Notând cu $h_{apă}$ înălțimea la care se ridică apa în vază, avem $V_{apă}=A_{bazei}\cdot h_{apă}$	1p
	$A_{bazei}=100\ \text{cm}^2$	2p
	$V_{apă}=3000\ \text{cm}^3 \Rightarrow h_{apă}=30\ \text{cm}$	2p
c)	$V_{cub}=64\ \text{cm}^3$	2p
	Volumul celor 4 cuburi este egal cu $256\ \text{cm}^3$	1p
	Nivelul apei a crescut cu 2,56 cm	2p
2.*a)*	$DB=\sqrt{AD^2+AB^2}$	2p
	$DB=35\ \text{cm}$	3p
b)	Distanța de la E la AB este egală cu 21 cm	2p
	Aria cerută este egală cu $294\ \text{cm}^2$	3p
c)	Notând cu P proiecția punctului A pe dreapta EB, obținem $AP=\dfrac{84\sqrt{13}}{13}$ cm	2p
	$\sin(\sphericalangle AEB)=\dfrac{12}{13}$	3p

Testul **21** Evaluarea Națională 2012, subiect de rezervă (27 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	10	5p
2.	12	5p
3.	5	5p
4.	8	5p
5.	30	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$\left\|\sqrt{5}-3\right\|=3-\sqrt{5}$	2p
	$\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$	2p
	$a=6\in\mathbb{Z}$	1p
3.	Se notează cu n numărul de păsări. Cum $3\mid n, 4\mid n$ și c.m.m.d.c. $(3,4)=1$, obținem $12\mid n$	2p
	$70<n<80 \Rightarrow n=72$	1p
	$72-\dfrac{1}{3}\cdot 72-\dfrac{1}{4}\cdot 72=30$. Sunt 30 de gâște	2p
4.*a)*	Reprezentarea unui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	$A(m,-7)\in G_f \Rightarrow f(m)=-7$	3p
	$-2m+1=-7 \Rightarrow m=4$	2p
5.	$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8x$	2p
	$(x-1)^2-(x+1)^2=-4x$	2p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$V=L\cdot l\cdot h \Rightarrow V=300\ \text{cm}^3$	3p
	$V=0,3$ litri	2p
b)	$A_{totală\ paralelipiped}=2L\cdot l+2L\cdot h+2l\cdot h=280\ \text{cm}^2$	2p
	$\dfrac{10}{100}\cdot 280=28\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{material}=280+28=308\ \text{cm}^2$	1p
c)	Triunghiul MAS este dreptunghic	2p
	$MS=12,5$ cm	2p
	Finalizare	1p
2.*a)*	Lungimea unui semicerc este egală cu $\pi R=\pi$ m	2p
	Lungimea benzii protectoare este egală cu $(8+2\pi)$ m	3p
b)	$A_{ABCD}=8\ \text{m}^2$	2p
	Aria celor două semicercuri este egală cu $\pi\ \text{m}^2$	2p
	Aria suprafeței mesei este $(8+\pi)\ \text{m}^2$	1p
c)	Lungimea traseului parcurs de furnică este $L_f=2\left(1+\sqrt{5}\right)$ m	2p
	Lungimea traseului parcurs de buburuză este $L_b=(4+\pi)$ m	1p
	$2\sqrt{5}=\sqrt{20}<5<2+3,14<2+\pi$, de unde concluzia	2p

Testul 22 Evaluarea Naţională 2012, sesiunea specială (6 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	14	5p
2.	20	5p
3.	48	5p
4.	20	5p
5.	90	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	1p
	$\sqrt{18}=2\sqrt{2}$	1p
	$a=4\in\mathbb{Z}$	1p
3.	Se notează cu x preţul unei cărţi $\Rightarrow 10-x$ este preţul unui pix, iar $x-5$ este preţul unui caiet	3p
	$2x-5=9$	2p
	Preţul unei cărţi este de 7 lei	2p
4.	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f	1p
a)	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Trasarea graficului funcţiei	2p
b)	$A\in G_f \Rightarrow f(p)=p+4$	1p
	$6-3p=p+4\Rightarrow p=\frac{1}{2}$	2p
5.	$2-\frac{8}{x+2}=\frac{2(x-2)}{x+2}$	3p
	$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$	2p
	$E(x)=2$	2p
		1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$AD=5$ m	2p
	$DM=13$ m	3p
b)	Feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale	2p
	$A_{\text{laterală piramidă}}=25\sqrt{3}$ m^2	3p
c)	O centrul pătratului $MNPQ\Rightarrow SO=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m	2p
	Înălţimea turnului este egală cu $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+12\right)$ m	1p
	$\frac{5\sqrt{2}}{2}+12=\frac{\sqrt{50}}{2}+12<\frac{\sqrt{64}}{2}+12=16$	2p
2.*a)*	$A=L\cdot l=216$ dm^2	3p
	$A=2{,}16$ m^2	2p
b)	$AP=BP=6\sqrt{10}$ dm	3p
	$P_{APB}=12+12\sqrt{10}$ dm	2p
c)	$\sphericalangle MBN\equiv\sphericalangle DCN$ şi $\sphericalangle MNB\equiv\sphericalangle DNC\Rightarrow \Delta BNM$ şi ΔCND sunt asemenea	1p
	$\frac{MB}{DC}=\frac{BN}{CN}\Rightarrow\frac{BN}{CN}=\frac{1}{2}$	1p
	$BN+NC=BC=18$ dm $\Rightarrow BN=6$ dm şi $NC=12$ dm	1p
	ΔBNM şi ΔCND sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow m(\sphericalangle MNB)=m(\sphericalangle DNC)=45^\circ$	1p
	$m(\sphericalangle MND)=90^\circ\Rightarrow MN\perp ND$	1p

Testul 23 Evaluarea Naţională 2012, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	8	5p
2.	10	5p
3.	20	5p
4.	80	5p
5.	10	5p
6.	20	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma	4p
	Notează prisma	1p
2.	$5a-11b+21c=2a+b-3c+3(a-4b+8c)$	3p
	Finalizare $5a-11b+21c=90$	2p
3.	Se notează cu x numărul de pagini citite în prima zi; $x+(x+3)+(x+6)+(x+9)+(x+12)=230$	2p
	$x=40\Rightarrow$ numărul de pagini citite, pe zile, este: 40, 43, 46, 49, 52.	2p
	În a doua zi persoana a citit 43 de pagini, iar 43 este un număr prim	1p
4.*a)*	Reprezentarea corectă a unui punct de pe graficul funcţiei f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
b)	$G_f\cap Oy=\{A(0,-3)\}$	1p
	$G_g\cap Oy=\{B(0,5)\}$	1p
	$G_f\cap G_g=\{E(2,-1)\}$	1p
	$AB=3+5=8$	1p
	$A_{\Delta AEB}=8$	2p
5.	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$	2p
	$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$	

	$x^2+\frac{1}{x^2}=7$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	Notăm piramida $VABC$ și cu O centrul bazei $ABC \Rightarrow OA=\sqrt{3}$ cm	2p
	Finalizare: $VO=1$ cm	3p
b)	$A_b=\frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm^2	3p
	Finalizare: $V=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm^3	2p
c)	Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$, atunci $VM=\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm	1p
	$A_{lat}=\frac{9}{4}\sqrt{7}$ cm^2	1p
	$A_t=\frac{9\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{4}$ cm^2	1p
	$\sqrt{3}+\sqrt{7}>4,3$	1p
	Aria suprafeței minime este mai mare decât 960 cm^2	1p
2.a)	Perimetrul grădinii este de $2\cdot(100+60)=320$ m	2p
	Lungimea gardului este $320-4\cdot4=304$ m	3p
b)	Se formează patru parcele dreptunghiulare, fiecare parcelă având lungimea de $(100-4):2=48$ m și lățimea de $(60-4):2=28$ m	2p
	Aria unei parcele este de $48\cdot28=1344$ m^2	1p
	Aria grădinii este de $100\cdot60=6000$ m^2	1p
	Aria aleilor este egală cu $6000-4\cdot1344=624$ m^2	1p
c)	Raza maximă a cercului $=14$ m	2p
	Finalizare: $A_c=196\pi$ m^2	3p

Testul **24** Evaluarea Națională 2011 (22 iunie)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	10	5p
2.	$\frac{3}{10}$	5p
3.	10	5p
4.	6	5p
5.	45	5p
6.	45	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$(a-1)(b+1)=6\Rightarrow b+1\in D_6$	2p

	Cum $a,b\in\mathbb{N}\Rightarrow(a,b)\in\{(2,5);(3,2);(4,1);(7,0)\}$	3p
3.	Se notează cu x prețul inițial al televizorului; prețul după scumpire este $x+10\%x=\frac{11}{10}x$	1p
	Prețul după ieftinire este $\frac{11}{10}x-10\%\left(\frac{11}{10}x\right)=\frac{99}{100}x$	2p
	$\frac{99}{100}x=1980$	1p
	$x=2000$ lei	1p
4.a)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției	2p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	Fie punctul $M(a,a)$. Avem $f(a)=a$ și $f(a)=-a+2$	3p
	Finalizare: ambele coordonate sunt egale cu 1	2p
5.	$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-\sqrt{6}\right)=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$	2p
	$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}$	2p
	$a=3\in\mathbb{N}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

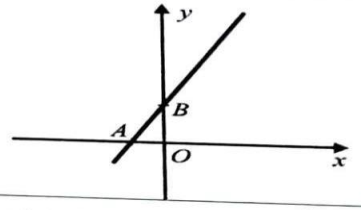
1.a)	$AC^2=2AB^2\Rightarrow AC^2=1800$	2p
	$CC'=AC=30\sqrt{2}$ cm	3p
b)	$\sphericalangle(AP,(ABC))\equiv\sphericalangle PAC$	2p
	$\Delta ACC'$ este dreptunghic isoscel	1p
	$m(\sphericalangle AP,(ABC))=45^\circ$	2p
c)	Fie $PT\perp(ABC)$ și cum A, C', P sunt puncte coliniare rezultă că $T\in AC$	1p
	În ΔAPT, $\sin45^\circ=\frac{PT}{AP}$	2p
	$PT=45\sqrt{2}$ cm	2p
2.a)	$OM=8$, unde O este mijlocul diametrului $[AB]$	1p
	$MD=\sqrt{8^2+24^2}=8\sqrt{10}$ m	3p
	Distanța parcursă de albină este de $\left(8+8\sqrt{10}\right)$ m	1p
b)	Sunt 2 cercuri, fiecare cu raza $r=8$ m	2p
	Aria suprafeței plantate cu flori este egală cu $\mathcal{A}=2\pi r^2=128\pi$ m^2	3p
c)	Aria dreptunghiului este egală cu 512 m^2	2p
	Aria porțiunii haşurate este egală cu $128\cdot(4-\pi)$ m^2	1p
	$\pi>3,14\Rightarrow4-\pi<0,86\Rightarrow128(4-\pi)<111$ m^2	2p

Testul 25 Evaluarea Naţională 2011, sesiunea specială (8 iunie)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{5}$	5p
2.	10	5p
3.	$[2,+\infty)$	5p
4.	4	5p
5.	30	5p
6.	350 mii lei.	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul	4p
	Notează paralelipipedul	1p
2.	$\frac{3x+2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{-1}{x+1}=3+\frac{-1}{x+1}$, deci $x+1\in D_{-1}=\{1,-1\}$	2p
	$x+1=1\Rightarrow x=0$ şi $x+1=-1\Rightarrow x=-2$. Aşadar, $A=\{0,-2\}$	3p
3.	Fie x, y numerele, $x>y$. Avem $(x+y).(x-y)=x^2-4$,	2p
	de unde se obţine $x^2-y^2=x^2-4$, deci $y=2$.	3p
4.a)	 un punct reprezentat corect	2p
	al doilea punct reprezentat corect	2p
	trasarea graficului	1p
b)	$f(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $f(0)=2\cdot 0+1=1\Rightarrow B(0,1)$	3p
	$A_{AOB}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}=\frac{1}{4}$	2p
5.	Egalitatea se poate scrie $x^3-3x^2-10x=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$,	2p
	de unde se obţine $a+b+c=-3$, $ab+bc+ac=-10$, $abc=0$. Din ultima egalitate rezultă că un factor este obligatoriu 0. Fie $c=0$, de unde $a+b=-3$, $ab=-10$. De aici se obţine $a=-5$, $b=2$. Aşadar, $a, b, c\in\{-5, 2, 0\}$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	a) Singurul mod în care se pot aranja 7 pătrate identice pentru a forma un dreptunghi este acesta: 	3p
	Aşadar, podeaua are dimensiunile 4 dm şi 28 dm, aria fiind $4\cdot 28=112$ dm².	2p
b)	Înălţimea camerei este $4\cdot 5=20$ dm.	2p
	Aria laterală este $2\cdot 4\cdot 20+2\cdot 28\cdot 20=1280$ dm².	3p
c)	Volumul este $V=4\cdot 28\cdot 20=2240$ dm²	3p
	$=2240$ litri.	2p
2.a)	$4+4+8+2\pi R=16+4\pi$ cm	5p
b)	Un dreptunghi (semidiscurile se compensează reciproc);	3p
	aria este $4\cdot 8=32$ cm².	2p
c)	Pătratul are aria 256 cm²;	2p
	poate fi acoperit complet cu 8 piese (se poate desena o astfel de acoperire)	3p

Testul 26 Evaluarea Naţională 2011, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	13	5p
2.	10	5p
3.	40	5p
4.	54	5p
5.	45	5p
6.	31	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$-4\le 3x-2\le 4$	2p
	$-\frac{2}{3}\le x\le 2$	1p
	$A\cap\mathbb{N}=\{0, 1, 2\}$	2p
3.	Se notează cu x numărul necunoscut; $2x-0,(3)=\frac{6x-1}{3}$	1p
	$1,4(6)=\frac{22}{15}$	1p
	$0,(45)=\frac{5}{11}$	1p
	$\frac{6x-1}{3}\cdot\frac{15}{22}=\frac{5}{11}$	1p
	$x=\frac{1}{2}$	1p
4.a)	Alegerea corectă a două puncte care aparţin graficului	4p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
b)	$A(m,-1)\in G_f\Leftrightarrow f(m)=-1$	2p
	$f(m)=-2m+5$	1p
	$-2m+5=-1$	1p
	$m=3$	1p
5.	$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\sqrt{3}+3$	1p

	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2=\frac{3}{4}+\sqrt{3}+1$	1p
	$(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})=-4$	1p
	$a=1\in\mathbb{Z}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	Lungimea muchiei cubului este egală cu 10 dm	2p
	$V_{cub}=V_{apă}=1000\ \text{dm}^3$	2p
	$V_{apă}=1000$ litri	1p
b)	$P_b=66$ dm	2p
	Aria laterală $A_l=P_b\cdot h=660\ \text{dm}^2$	3p
c)	Notăm cu h înălțimea cerută și astfel volumul apei este $V_{apă}=25\cdot 8\cdot h=1000\ \text{dm}^3$	3p
	$h=5$ dm	2p
2.*a)*	Raza rondului este $r=3$ m	2p
	Aria rondului este egală cu $\pi r^2=9\pi\ \text{m}^2$	3p
b)	Aria dreptunghiului este egală cu $54\ \text{m}^2$	2p
	Aria porțiunii haşurate este egală cu $(54-9\pi)\ \text{m}^2$	1p
	Justificarea faptului că $54-9\pi<9\pi$	2p
c)	Cea mai mare distanță dintre două puncte ale dreptunghiului este lungimea diagonalei $[AC]$	2p
	Folosind teorema lui Pitagora se obține $AC=\sqrt{117}$ m	2p
	Finalizare: $\sqrt{117}<\sqrt{121}=11$	1p

Testul **27** Evaluarea Naţională 2010 (12 mai)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	4	5p
2.	5	5p
3.	3	5p
4.	$4\sqrt{3}$	5p
5.	60	5p
6.	2	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$\begin{cases}9l+7m=76\\l+m=10\end{cases}$	2p
	$9(10-m)+7m=76$	1p
	$m=7$	2p
3.*a)*	$\frac{1}{4}=0,25=25\%$	2p

	$25<30<40$	2p
	Persoana cheltuieşte cel mai puţin în a treia zi	1p
b)	Persoana cheltuieşte 95% din S, deci îi rămân 5% din S	2p
	5% din $S=100$	1p
	$s=2000$ lei	2p
4.	$f(0)=1\Rightarrow A(0,1)$	2p
	$f(1)=0\Rightarrow B(1,0)$	2p
	Trasarea graficului funcției (dreapta AB)	1p
5.	$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=7+2\sqrt{10}$	2p
	$p=7+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-2-\sqrt{10}+10$	2p
	$p=15\in\mathbb{N}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$AC'^2=AB^2+BC^2+CC'^2$	2p
	$AC'=13$ m	3p
b)	Aria laterală $=P_b\cdot h$	2p
	$P_b=32$ m	2p
	Aria laterală $=96\ \text{m}^2$	1p
c)	96000 litri $=96000\ \text{dm}^3=96\text{m}^3$	1p
	$48\cdot h_{apă}=96$	2p
	$h_{apă}=2$ m	2p
2.*a)*	Raza cercului $=15$ m	1p
	Lungimea celor două semicercuri este egală cu lungimea unui cerc. Lungimea cercului $=2\pi R$	2p
	Lungimea gardului $=(30\pi+80)$ m	2p
b)	Aria dreptunghiului $=1200\ \text{m}^2$	1p
	Aria celor două semicercuri $=225\pi\ \text{m}^2$	1p
	Aria patinoarului $=(1200+225\pi)\ \text{m}^2$	1p
	$1200+225\pi<1200+225\cdot 3,15<2000$	2p
c)	Triunghiul ABC este isoscel	1p
	$\sin(\sphericalangle ABC)=\sin(\sphericalangle ABO)=\frac{AO}{AB}$, unde O este mijlocul laturii $[BC]$	1p
	$AO=15$ m	1p
	Din teorema lui Pitagora rezultă $AB=25$ m	1p
	$\sin(\sphericalangle ABC)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$	1p

Testul **28** Evaluarea Naţională 2010, sesiunea specială

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	208	5p

2.	$\frac{3}{2}$	5p
3.	$[0,3]$	5p
4.	10	5p
5.	36	5p
6.	35	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$m_a = \frac{a+b}{2}$	1p
	Suma numerelor este 35	2p
	Celălalt număr este $35-7=28$	2p
3.*a)*	Notăm cu x prețul înainte de reduceri. $90\% \cdot 90\% x = 81$	3p
	Rezolvarea ecuației: $x = 100$ lei	2p
b)	$p\%$ din $100 = 81$ lei	1p
	$p = 81$	2p
	Deci prețul după cele două reduceri s-a micșorat cu 19%	2p
4.	$f(2) = a$	1p
	$f(2) = 6-2a$	2p
	$6-2a = a \Rightarrow a = 2$	2p
5.	$x^2-2x-15 = (x-5)(x+3)$	2p
	$x^2-10x+25 = (x-5)^2$	2p
	$\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25} = \frac{x+3}{x-5}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. AM este distanța de la punctul A la planul (BCE)	2p
	$AM = \sqrt{3}$ m	3p
b)	$A_b = \sqrt{3}$ m^2	2p
	$V_{prismă} = 3\sqrt{3}$ m^3 (1p pentru formulă)	3p
c)	Aria totală a cortului $= 18+2\sqrt{3}$ m^2	3p
	$18+2\sqrt{3} = 18+\sqrt{12} < 18+\sqrt{16} = 22$, deci sunt suficienți 22 m^2 de pânză	2p
2.*a)*	1 ha $= 10000$ m^2	2p
	8 ha $= 80000$ m^2	3p
b)	ΔABP isoscel	1p
	$A_{ABP} = \frac{AB^2}{2}$	1p
	$A_{ABCD} = AB \cdot BC$	1p
	$\frac{A_{ABP}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{4}$	1p
	Finalizare	1p
c)	$2AB^2 = 80000$	1p
	$AB = 200$ m	1p
	Din teorema lui Pitagora rezultă $BP = 200\sqrt{2}$ m	2p
	$BP = 283$ m	1p

Testul **29** Evaluarea Națională 2010, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	16	5p
2.	4	5p
3.	$\frac{11}{29}$	5p
4.	2	5p
5.	5	5p
6.	30	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează corect piramida $SABCD$	4p
	Notează corect	1p
2.	Numărul cărților de pe raftul al II-lea $= 24 \cdot 2 = 48$ cărți	3p
	În total sunt $48+24 = 72$ cărți	2p
3.*a)*	$55:4 = 13$ rest 3	2p
	$55:7 = 7$ rest 6	2p
	Deci pot fi 55 de bomboane	1p
b)	Fie x numărul minim de bomboane; $x = 4a+3$ și $x = 7b+6$	2p
	Justificarea faptului că $x = 27$	3p
4.	$f(0) = -5$, $-5 \neq 5$, deci $P(0,5) \notin G_f$	3p
	$f(5) = 0$, deci $P(5,0) \in G_f$	2p
5.	$(x+2)^3 - x - 2 = (x+2)\left[(x+2)^2 - 1\right] =$	2p
	$= (x+2)(x+2+1)(x+2+1) =$	2p
	$= (x+1)(x+2)(x+3)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$MB = 6-x$	2p
	$A_{MBCG} = MB \cdot BC$	1p
	$A_{MBCG} = 5(6-x)$	2p
b)	$DG = 4+x$	2p

	$A_{AMGD}=\frac{(DG+AM)\cdot MG}{2}$	1p
	$A_{AMGD}=\frac{(4+x+x)\cdot 5}{2}=5\cdot(x+2)$	2p
c)	$5(6-x)=5(x+2)$	2p
	Finalizare: $x=2$	3p
d)	$A_{AMGD}=5\cdot 4=20$ m^2	1p
	20 m^2 > 10 m^2, deci se acordă reducere; pentru 1 m^2 de gresie va plăti $80-80\cdot 5\%=76$ lei	2p
	Toată gresia costă $76\cdot 21=1596$ lei	2p
2.*a)*	$A_{ABCD}=36$ dm^2	1p
	Calculul apotemei piramidei: $SM=3\sqrt{10}$ dm, unde M este mijlocul unei muchii a bazei	2p
	$A_{laterală}=36\sqrt{10}$ dm^2	1p
	$A_{totală}=36\left(\sqrt{10}+1\right)$ dm^2	1p
b)	$OT=SO-ST=6$ dm	1p
	$V_{TABCD}=72$ dm^3 (Dacă elevul nu calculează volumul, dar scrie corect formula lui, se acordă **1p**)	2p
	Finalizare: $72>70$, deci în bazin pot intra 70 de litri de apă	2p



Tema 3.2 Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Testul 1

I. 1. 108; **2.** 10; **3.** 12; **4.** $\frac{4}{3}$; **5.** 144; **6.** 24.

II. 2. $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$; **3.** ***a)*** 12 persoane; ***b)*** 400 lei; **4.** ***a)*** $m=1$; **5.** $a=-1\in\mathbb{Z}$.

III. 1. ***a)*** $V=4500$ m^3; ***b)*** 3000000 l apă; ***c)*** 37 ore şi 30 minute; **2.** ***a)*** $L_{gard}=80\pi+120$ m; $3{,}14<\pi<3{,}15 \Rightarrow 251{,}2<80\pi<252 \Rightarrow 371{,}2<8\pi+120<372$ m $\Rightarrow L_{gard}<372$ m. ***b)*** $S=1100\pi+4000\Rightarrow\frac{S-4000}{11\pi}=100=10^2$ - pătrat perfect; ***c)*** din asemănarea triunghiurilor EPC şi $APF\Rightarrow PE=\frac{40\sqrt{29}}{7}$ m.

Testul 2

I. 1. 3; **2.** 60; **3.** $\frac{71}{30}$; **4.** 9; **5.** 3; **6.** 13.

II. 2. $x=2$; **3.** 12 km; **4.** ***b)*** $m=3$. **5.** $a=25=5^2$ - pătrat perfect.

III. 1. ***a)*** Teorema lui Pitagora; ***b)*** 104 m; ***c)*** 555 m^2; **2.** ***a)*** 6 dm^3; ***b)*** 750 bomboane; ***c)*** 15 dm^2.

Testul 3

I. 1. 9; **2.** $x\in\{0;2;4;6;8\}$; **3.** 3; **4.** $100\,\pi$; **5.** 48; **6.** 25.

II. 2. Dobânda după un an este egală cu $\frac{6{,}5}{100}\cdot 50000=3250$ lei. După un an, persoana va avea la bancă 500000+3250=53250 lei; **3.** $x=3$, $y=-\frac{1}{2}$; **4.** ***b)*** $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot f(1)\cdot f(-3)}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 6}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{N}$.

5. $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}$.

III. 1. ***a)*** $R=20$ m $\Rightarrow l=40$ m $\Rightarrow A=2000$ m^2; ***b)*** $S=400\cdot(5+\pi)\Rightarrow\frac{S}{5+\pi}=400=20^2$ - pătrat perfect; **2.** ***a)*** 2400 litri; ***b)*** 1120 dm^2; ***c)*** $h=0{,}6$ m.

Testul 4

I. 1. 8; **2.** $\frac{4}{3}$; **3.** 180; **4.** 8; **5.** 30; **6.** 10.

II. 2. $x+\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}=80\Rightarrow x=48$; 48, 12, 20; **3.** $x\in[2;+\infty)$; **4.** ***b)*** $\frac{1}{4}$; **5.** $a=7\in\mathbb{N}$.

III. 1. ***a)*** $A_l=36$ m^2 $\Rightarrow$ sunt necesare 9 cutii; ***b)*** 243 lei; ***c)*** $V=40$ m^3 = 40000 litri, $40000:250=160$ zile; **2.** ***a)*** 300 m^2; ***b)*** 850 m^2; ***c)*** $300\cdot 25=7500$ fire, $7500\cdot 1{,}5=11250$ lei.

Testul 5

I. 1. 11; **2.** $2\cdot 3^3$; **3.** 0; **4.** 6; **5.** 10; **6.** 350.

II. 2. 100 bilete de 6 lei. **3.** $a=1\in\mathbb{N}$. **4.** ***a)*** $A(0;4), B(1;5)$ ***b)*** $m=-5$; **5.** $(x-5)^3-x+5=(x-5)^3-(x-5)=(x-5)\left[(x-5)^2-1^2\right]=(x-4)(x-5)(x-6)$.

III. 1. ***a)*** $A_{OCD}=100$ m^2; $100:2=50$ şezlonguri; ***b)*** $\pi r=5\pi\Rightarrow r=5$ m $\Rightarrow$ $A_{\text{piscină}}=\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}=\frac{100\pi}{2}+\frac{25\pi}{2}=\frac{125\pi}{2}$ m^2; ***c)*** se închiriază 40 şezlonguri $\Rightarrow$ se încasează $40\cdot 20=800$ lei; **2.** a) $V=4$ m$^3=4000$ litri $\Rightarrow$ este nevoie de 400 găleţi; ***b)*** 100 minute; ***c)*** 0,8 m.

Testul 6

I. 1. 9; **2.** b; **3.** 1; **4.** 7; **5.** $24\sqrt{2}$; **6.** 300.

II. 2. 60 km; 20 km; 16 km; 24 km; **3.** 1215 lei; **4.** ***b)*** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; **5.** $a=4\in\mathbb{N}$.

III. 1. ***a)*** $\sqrt{281}$ m; ***b)*** 248 m^2; ***c)*** 2 m; **2.** ***a)*** 15 m; ***b)*** $20\cdot(15-x)$ m^2; 2,5 m; ***c)*** $A_{MBCN}=250$ m$^2=$ 2,5 dam$^2=2,5$ ari $\Rightarrow$ se recoltează 75 kg sfeclă.

Testul 7

I. 1. 987; **2.** 3; **3.** $x=-11$; **4.** 100; **5.** 30; **6.** 1 ian.

II. 2. 500 borcane; **3.** ***a)*** 50 lei; ***b)*** 45 lei şi 11 lei; **4.** $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; **5.** $E(x)=x^2+6;15$.

III. 1. ***a)*** $19,56-2x$; ***b)*** 0,9 m; ***c)*** 3,552 litri vopsea; **2.** ***a)*** 448 cm^3; ***b)*** $32\sqrt{13}$ cm^2; ***c)*** 6 lei.

Testul 8

I. 1. 1; **2.** $x\in[2;+\infty)$; **3.** $\frac{2}{5}$; **4.** 8; **5.** 3; **6.** 6,7(3).

II. 2. $a=6$; $b=9$; $c=12$; **3.** ***a)*** 24; ***b)*** 28; **4.** ***a)*** $m=2$; **5.** $3+3^2+3^3=39:13$.

III. 1. ***a)*** 6 cm; ***b)*** $A_l=288$ cm^2; ***c)*** 9 cm; **2.** ***a)*** $\frac{r}{R}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ***b)*** $\frac{4}{\pi}$; ***c)*** $9\cdot(4-\pi)$ cm^2.

Testul 9

I. 1. 99; **2.** $(-1;3]$; **3.** 45; **4.** $-4,3$; **5.** $5\sqrt{3}$; **6.** 109.

II. 2. 74; **3.** 13 copii; 63 mere; **4.** $A=2012^2$ – pătrat perfect; **5.** 49.

III. 1. ***a)*** 2,10 m; ***b)*** $225\cdot(4-\pi)$ cm^2; ***c)*** 30π; **2.** ***a)*** $2\sqrt{11}$ m; ***b)*** $16\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)$ m^2; ***c)*** $\frac{224}{3}$ m^3.

Testul 10

I. 1. 0; **2.** 1; **3.** -1; **4.** 18π cm; **5.** 128π; **6.** 2.

II. 2. ***a)*** 50 bani; ***b)*** 2 kg mere şi 4 kg piersici; **3.** ***a)*** 30 ani, 10 ani; ***b)*** peste 10 ani; **4.** ***a)*** $f(x)=x-1$; **5.** $(x+5)^2+(2y-5)^2\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

III. 1. ***a)*** 120 cm; ***b)*** 5,7 m şnur; ***c)*** $0,81\cdot 10+6\cdot 4+0,63\cdot 18=43,44$ lei. **2.** ***a)*** 32 dm^2; ***b)*** $A'O=\sqrt{11}$ cm; ***c)*** $V=4>3,8$.

Testul 11

I. 1. 36; **2.** 3; **3.** 18; **4.** 7; **5.** 36π; **6.** 8.

II. 2. 200 pagini; **3.** 25; **4.** $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$; **5.** ***a)*** -8; ***b)*** $A\left(\frac{4}{3};0\right)$; $B(0,-1)$.

III. 1. ***a)*** $3x$ dam^2; ***b)*** 6 dam; ***c)*** 4455 lei; **2.** ***a)*** $3375\sqrt{3}$ cm^3; ***b)*** $3375\sqrt{3}\,\text{cm}^3=5737,5\,\text{cm}^3=5,7375$ litri $\Rightarrow$ nu încap 6 litri de apă; ***c)*** 30 cm.

Testul 12

I. 1. 0; **2.** $\frac{5}{3}$; **3.** 8; **4.** 30; **5.** $\sqrt{2}$; **6.** 25.

II. 2. 3 ore; **3.** $x=3+\frac{x}{2}\Rightarrow x=6$; 12 kg; **4.** ***a)*** $M\left(\frac{1}{3};1\right)$; ***b)*** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$;

5. $(x^2+5x)(x^2+5x+2)+1=[(x^2+5x)+1]^2$ pătrat perfect.

III. 1. ***a)*** 150 dale; ***b)*** 1,2 m; ***c)*** 1008 lei; **2.** ***a)*** 50 m^3; ***b)*** 5 cm; ***c)*** 0,5 m.

Testul 13

I. 1. 67; **2.** {-3, 4}; **3.** $\frac{23}{39}$; **4.** 10; **5.** $4\sqrt{2}$; **6.** 4.

II. 2. $a=2-\sqrt{3}$, $b=2+\sqrt{3}$, $m_g=1$; **3.** ***a)*** 123 : 4 = 30 rest 3; 123 : 5 = 24 rest 3; 123 : 6 = 20 rest 3. Rezultă că pot fi 123 de militari în subunitate. ***b)*** Aflăm cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 5 şi 6 şi îl adunăm cu 3.
Obţinem: 60 + 3 = 63. Aşadar, numărul minim de militari este 63. **4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.
Se rezolvă sistemul: $\begin{cases}f(-1)=0\\f(1)=4\end{cases}$, adică $\begin{cases}-a+b=0\\a+b=4\end{cases}$ de unde se obţine $a=b=2$.

5. $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)}=\frac{2}{x+1}$.

III. 1. ***a)*** Fie $CH\perp AB$, $H\in AB$. Rezultă că $HB=\frac{AB-CD}{2}=2$ dam. Cum triunghiul CHB este dreptunghic în H, rezultă că $CH=4$ dam. Aşadar, $A_{carte}=A_{trapez}=\frac{(AB+CD)CH}{2}=32$ dam^2.

b) $P_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=10+2\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}=16+4\sqrt{5}\cong 16+4\cdot 2,23=24,92$ *dam*. Aproximând prin adaos la un număr natural, obţinem 250 metri liniari de sârmă. ***c)*** $AF=AB-FH-HB$. Dar $EC=\frac{1}{3}CD=2\,dam=FH=HB$. De aici avem că $AF=6$ dam.

d) $\triangle EPC\sim FPA\Rightarrow\frac{EC}{AF}=\frac{EP}{PF}\Rightarrow\frac{EP}{FP}=\frac{2}{6}\Rightarrow\frac{EP}{EP+PF}=\frac{2}{8}$ de unde, cum $EF=4$ rezultă că $EP=1$ *dam*. Din $\frac{EP}{FP}=\frac{1}{3}$ rezultă că $PF=3$ dam. Vom avea că: $A_{hexagon}=\frac{EC\cdot PE}{2}+\frac{PF\cdot AF}{2}=10$ dam^2.

2. ***a)*** $A_t=6(6+\sqrt{3})$ m^2. ***b)*** $V=18\,m^3=18000\,l$.

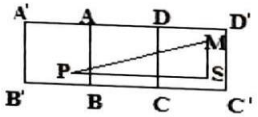
Testul 14

I. 1. 4; **2.** $a=3\sqrt{2}$; **3.** 6; **4.** 12; **5.** 12; **6.** 4.

II. 2. Mai are de citi 30% din cele 240 de pagini, adică 72 de pagini. **3.** $164+240=404$; $404-320=84$ elevi cunosc ambele limbi; $164-84=80$ de elevi cunosc doar limba franceză

4. Se rezolvă sistemul: $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(-2)=0 \end{cases}$, de unde se obţin $m=0$ şi $n=3$.

III. 1. ***a)*** Cum perimetrul pătratului este egal cu $4l$, rezultă că $l=64:4=16\ m$ Aşadar, $A_{parcela}=16^2=256\ m^2$. ***b)*** Numărul firelor este: $256\cdot 16=4096$ ***c)*** $4096\cdot 5=20480$ kg vinete s-au recoltat ***d)*** $20480\cdot 1{,}5=30720$ lei a încasat **2.** ***a)*** Fie punctul R situat pe peretele $CDD'C'$ la distanţa de 1m faţă de muchiile CC' şi DC; Justificarea relaţiilor $DM\parallel RC'$ şi $PB'\parallel RC'$. Deci $PB'\parallel RC'$, de unde rezultă punctele P,B',M şi D coplanare; ***b)*** Pentru desfăşurarea cubului pe care se consideră punctul S ca în figura de mai jos. $PS=8\text{m}, SM=2\text{m}$. Drumul cel mai scurt este PM, iar $PM=2\sqrt{17}\text{m}$.



c) Fie $MT\perp CC', T\in(CC'), TU\perp BB', U\in(BB')$ $BB'\perp(MUT)\Rightarrow BB'\perp MU$, $d(M,BB')=MU$. Cum unghiul MTU este drept, $MT=3\text{m}, TU=4\text{m}\Rightarrow MU=5\text{m}$.

Testul 15

I. 1. $6\sqrt{5}$; **2.** $[3,+\infty)$; **3.** $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; **4.** 10 cm; **5.** $9\sqrt{3}$ m; **6.** 6,56.

II. 2. Dacă pe primul raft sunt x cărţi, pe al doilea sunt $5x$ cărţi. Avem că $x+5x=120$. De aici se obţine că pe primul raft sunt 20 de cărţi, iar pe al doilea 100 de cărţi. **3.** ***a)*** 1 km = 1 000 000 mm. După prima operaţie rămâne $1000000\cdot\frac{1}{2}$, după a doua rămâne $1000000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$. După $(n-1)$ operaţii rămâne $1000000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1000000}{n}$. După n operaţii luăm $\frac{1000000}{n(n+1)}<1$. Se obţine inecuaţia $n(n+1)>1000000$, de unde $n=1000$. ***b)*** După n operaţii rămâne: $\frac{1000000}{n+1}<1\Rightarrow n>999999\Rightarrow n=1000000$ **4.** $f(x)=x$ de unde, înlocuind $f(x)$ cu $2x-4$ obţinem $x=4$ deci punctul $A(4,4)$.

III. 1. ***a)*** Notând cu x lăţimea terenului, avem că lungimea acestuia este de $3x$ şi, exprimând perimetrul se ajunge la ecuaţia $8x=200$. De aici, $x=25$, deci lăţimea este de 25 m şi lungimea de 75 m. ***b)*** $A_{teren}=L\cdot l=1875\ m^2$ ***c)*** $P_{exterior\ al\ pistei}=2\cdot(75+5)+2\cdot(25+5)=220\ m$.

2. ***a)*** $O\in[AM]$, $AM=3\cdot VO$, deci $AM=15$ cm, $OM=\frac{1}{3}\cdot AM=5cm\overset{T.P.}{\Rightarrow}VM=5\sqrt{2}$;

b) $m\left[\sphericalangle((VBC),(ABC))\right]=m(\sphericalangle VMO)=45^0$; ***c)*** $A_l=75\sqrt{6}cm^2$; $A_t=75\sqrt{6}+75\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Testul 16

I. 1. 20; **2.** 0,4; **3.** 16; **4.** 30; **5.** 36π; **6.** 1.

II. 2. Se notează cu x numărul caietelor de matematică şi cu y numărul caietelor de dictando. Se formează sistemul: $\begin{cases} x+y=200 \\ 1{,}8x+1{,}2y=270 \end{cases}$ din care se obţine $x=50$ şi $y=150$.

3. ***a)*** $V_{cub\ mare}=125\cdot V_{cub\ mic}=125\cdot 1\ cm^3=125\ m^3$. Deci, $l^3=125$ de unde $l=5\ cm$.

b) 27 de cuburi mici nu au nicio faţă vopsită, 54 au o singură faţă vopsită. **4.** $f(-2\sqrt{2})=-5$

5. $E(x)=\left[(x+3)+(x-4)\right]^2=(2x-1)^2$

III. 1. ***a)*** $A=\frac{2\cdot 5}{2}=5\ \text{m}^2$ ***b)*** $A_{trapez}=\frac{(7+5)\cdot 5}{2}=30\ \text{m}^2$ ***c)*** Aria sufrageriei este de 40 m^2. Aşadar, aria suprafeţei cu gresie neagră este de $40-30-5=5\ \text{m}^2$ ***d)*** $31\cdot 40=1240$ lei.

2. ***b)*** $A_l=54\sqrt{3}cm^2$; ***c)*** $81\ cm^3$.

Testul 17

I. 1. 0,535; **2.** $\frac{3}{4}$; **3.** 39; **4.** 15; **5.** 36π; **6.** $\frac{4}{11}$.

II. 2. Cu x ani în urmă mama avea $40-x$ ani, iar fiica avea $16-x$ ani. $40-x=3(16-x)$ de unde se obţine $x=4$. Deci cu 4 ani în urmă mama era de 3 ori mai în vârstă decât fiica. **3.** ***a)*** $3\cdot 2{,}4+3\cdot 9=34{,}2$; $100-34{,}2=65{,}8$ lei primeşte rest.

b) Pentru ca preţul coletului să fie minim trebuie ca acesta să conţină 2 cărţi şi 8 caiete. $9\cdot 2+8\cdot 2{,}4=37{,}2$ lei. **4.** $f(x)=g(x)$, adică $-3x+4=\frac{x}{3}+1$ de unde $x=\frac{9}{10}$.

$g\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{13}{10}$ deci punctul de intersecţie al graficelor celor două funcţii este $J\left(\frac{9}{10},\frac{13}{10}\right)$.

5. $F(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}$.

III. 1. ***a)*** $P=160$ m; ***b)*** $A_{sect.\ circ}=\frac{\pi R^2u^o}{360^o}=\frac{\pi\cdot 40^2\cdot 90^o}{360^o}=400\pi\cong 1256m^2$;

c) $A_{port.\ hasurată}=1600-1256=344\ m^2$ ***d)*** $344\cdot 1{,}5=516$ kg sămânţă sunt necesare

$516\cdot 8=4128$ lei s-au plătit pentru sămânţa de gazon **2.** ***a)*** $V_{cub\ inscris}=2^3=8\ \text{cm}^3$

b) $V_{corp\ obţinut}=4^3-2^3=64-8=56\ \text{cm}^3$; $A_{corp\ obţinut}=A_{cub\ iniţial}=96\ \text{cm}^2$.

Testul 18

I. 1. 84; **2.** $\left\{-2,\sqrt{9},\frac{6}{3}\right\}$; **3.** 3500 cm^3; **4.** 13; **5.** 400π; **6.** 7,2.

II. 2. $425+425\cdot 2=1275$ elevi. **3.** ***a)*** $n-2$ este c.m.m.m.c. al numerelor 45, 36, 54, adică $n-2=540$, de unde $n=542$. ***b)*** $n-2$ este multiplu de 540, de unde $n\in\{1622, 2162\}$.

4. $f(1)=2\Rightarrow A(1,2)G_f$ **5.** $(x+5)^3-x-5=(x+5)\left[(x+5)^2-1\right]=$

$=(x+5)(x+5+1)(x+5-1)=(x+4)(x+5)(x+6)$.

III. 1. ***a)*** $A=2500\ m^2$; $P=224\ m$ ***b)*** 896 **c)** $8{,}96\ m^3$ **2.** ***a)*** Ariile feţelor pot fi: $15\cdot 35=525\ mm^2=5{,}25\ cm^2$; $15\cdot 50=750\ mm^2=7{,}5\ cm^2$; $35\cdot 50=1750\ mm^2=17{,}5\ cm^2$; $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

b) $V_{cutiei}=15\cdot 35\cdot 50=26250\ mm^3$; $26250:65040\cong 40$ *beţe*; $V_{zar}=5^3=125\ mm^3$

$26250:125=210$ zaruri

Testul 19

I. **1.** 0; **2.** 4; **3.** 64; **4.** $\frac{3}{5}$; **5.** 75π; **6.** 11.

II. 2. $10\%\cdot 240\ lei=24$ lei; $240\ lei+24\ lei=264$ lei; **3.** $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$

$x^2+10x+21=(x+7)(x+3)$; $\frac{x^2-2x-15}{x^2+10x+21}=\frac{x-5}{x+7}$;

4. ***a)*** $ab=\sqrt{(11+4\sqrt{7})(11-4\sqrt{7})}, ab=\sqrt{121-112}$, de unde $ab=3$. ***b)*** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^2=11+4\sqrt{7}-2\cdot 3+11-4\sqrt{7}=16$ **5.** $a+b=60$; $a=2b+3$;

$3b+3=60\Rightarrow b=19$

$a+19=60\Rightarrow a=41$

III. 1. ***a)*** $P_{pătrat}=4\times l$; $\begin{matrix}P_{pătrat}=4\times 600=2400m\\ L_{sârmă}=5\times 2400=12\ 000\ m\end{matrix}$; ***b)*** $A_{pătrat}=l^2=360\ 000\ m^2$

$A_{dreptunghi}=A_{pătrat}\Rightarrow A_{dreptunghi}=360\ 000\ m^2$

$400\times L=360\ 000\Rightarrow L=900\ m$; ***c)*** $A_{dreptunghi}=360\ 000\ m^2=36$ ha

$4000\times 36=144\ 000$ kg grâu recoltat de pe trenul al doilea; $144\ 000\times 0{,}8=115\ 200$ lei încasaţi pe recolta de grâu; **2.** ***a)*** $V_{apă}=A_b\times h_{apă}$; 80 cm = 8 dm; $\begin{matrix}V_{apă}=l^2\times h_{apă}=144\times 8=1152dm^3\\ V_{apă}=1152dm^3=1152\ litri\end{matrix}$

b) $A_l=4\times l^2$; $A_l=4\times 12^2=4\times 144$; $A_l=576$ dm^2; ***c)*** $V_{cub}=l^3$; $V_{cub}=12^3=1728$ dm^3, deci în vas încap 1728 litri apă. Mai sunt necesari: $1728-1152=576$ litri de apă

Testul 20

I. **1.** $\frac{8}{15}$; **2.** 36; **3.** 5; **4.** 6; **5.** 9; **6.** 7,625.

II. 2. Notăm cu x lungimea întregului drum.

În prima zi $\frac{2}{7}\cdot x$

În a II-a zi $\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{7}x\right)$

În a III-a zi $\frac{1}{3}\cdot\left[x-\frac{2}{7}x-\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{7}x\right)\right]$

În a IV-a zi 200

Adunând distanţele din cele patru zile se egalează cu x şi se rezolvă ecuaţia. Se obţine $x=560$ km.

3. Se foloseşte ultima cifră şi se obţine 2. **4.** $\begin{cases}-a+b=0\\ a+b=4\end{cases}\Rightarrow a=2, b=2$

III. 1. ***a)*** $54\pi-81\sqrt{3}$ cm^2; ***b)*** $2\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)$ cm. **2.** ***a)*** Se aplică Teorema lui Pitagora în triunghiul VOM; ***b)*** $A_l=216\sqrt{2}$ cm^2; $V=216\sqrt{6}$ cm^3; ***c)*** $m(\sphericalangle((VAD);(VBC)))=90^\circ$.

Testul 21

I. 1. 67; **2.** 39; **3.** 100; **4.** $36\sqrt{3}$ cm^2; **5.** 125 cm^3; **6.** 14.

II. 2. $\frac{a}{11}=\frac{b}{4}$ şi $a=2b+30$, $30<b$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}4a=11b\\ a=2b+30\end{cases}$ care are soluţia $a=110, b=40$. **3.** ***a)*** Se rezolvă sistemul $\begin{cases}-(1-m)+m+2n-4=1\\ -2(1-m)+m+2n-4=0\end{cases}$ şi se obţine $m=0$; $n=3$; deci $f(x)=x+2$. **4.** Se rezolvă ecuaţia $\frac{1}{3}x+150+\frac{25}{100}x=x$ şi se obţine $x=360$ lei.

III. 1. ***a)*** Dimensiunile sunt de 2 dam şi 3 dam. Lungimea celor cinci rânduri de sârmă este de 50 dam. ***b)*** Aria terenului este de 600 m^2. Sunt necesare 72 kg gazon care costă 900 lei. **2.** ***a)*** 90°; ***b)*** $A_t=320$ cm^2; ***c)*** $V=384$ cm$^3=0{,}384$ litri; ***d)*** $d(B',AD')=\frac{8\sqrt{34}}{5}$ cm.

Testul 22

I. 1. 4; **2.** -9; **3.** 10,7 m; **4.** 8; **5.** 100; **6.** 22.

II. 2. Calculând suma primelor 1996 numere naturale şi înlocuind, numărul devine: $1997+2\cdot\frac{1996\cdot 1997}{2}=1997^2$ care este un pătrat perfect. **3.** ***b)*** $A(-1,-1)\in G_f$. **4.** a trebuie să fie par, b trebuie să fie divizibil cu 5. Răspuns final: numărul este 25. **5.** $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

III. 1. ***a)*** Cele şase "sectoare" sunt triunghiuri congruente. Deci, $A=6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ dam^2. ***b)*** Aria triunghiului se exprimă în două moduri: cu formula $A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ şi numeric, cu valoarea de la ***a)***. Egalând, obţinem $l=4$ dam, deci lungimea gardului exterior este egală cu 12 dam. **2.** ***b)*** $A_l=81\sqrt{39}$ cm^2; $V=486\sqrt{3}$ cm^3 ***c)*** $\frac{18\sqrt{13}}{13}$ cm; ***d)*** 60^0.

Testul 23

I. 1. 12; **2.** 72; **3.** $5\sqrt{3}$; **4.** 10; **5.** 200; **6.** 17.

II. 2. Folosim faptul că $8>\sqrt{65}$. Se obţine soluţia 4. **3.** ***b)*** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. **4.** Fie x numărul locuitorilor care erau în oraş acum doi ani; atunci putem scrie ecuaţia $\left(x+\frac{10}{100}x\right)+\frac{10}{100}\left(x+\frac{10}{100}x\right)=484000$, care are soluţia 400000 (locuitori erau acum doi ani).

III. 1. ***a)*** Folosind proprietatea medianei din vârful unghiului drept, rezultă că traseele sunt egale. ***b)*** Cele două triunghiuri au ariile egale şi egale cu jumătate din aria triunghiului ABC. Deci, fiecare triunghi are aria de 12 m^2. ***c)*** Se utilizează proprietatea liniei mijlocii în triunghi, 4 cm. **2.** ***a)***

$(L-l)^2=25$ și $L+l=13$, $h=\sqrt{L\cdot l}$; **b)** 228 cm²; **c)** 216 cm³.

Testul 24

I. **1.** 7; **2.** 128; **3.** $\frac{12}{5}=2,4$; **4.** 55°; **5.** $5\sqrt{3}$; **6.** $\frac{29}{50}$.

II. **2.** $x=1$; $y=5$; $z=15$; $t=30$. 3. $\{3,0,-5,\sqrt{4}\}$ și $\{-\sqrt{2},\sqrt{3},\pi\}$. **4.** **b)** Se rezolvă ecuația $f(x)=g(x)$ și se obține $x=\frac{9}{10}$. Coordonatele punctului de intersecție sunt $I\left(\frac{9}{10},\frac{13}{10}\right)$; c) $x=\frac{14}{23}$

III. **1.** ***a)*** $l=5\sqrt{2}$ m. Deci aria pătratului mic este $A=50$ m². Trebuie cumpărate 200 kg ciment. ***b)*** Restul suprafeței este de 50 m². Sunt necesare 12,5 kg gazon care costă 156,25 lei; ***c)*** $d=\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm. **2.** ***a)*** Din triunghiul MCD (dreptunghic în C) calculăm $MD=6\sqrt{2}$ cm și cum $MD'=12$ cm rezultă $DD'=6\sqrt{2}$ cm; ***b)*** $V=432\sqrt{2}$ cm³; ***c)*** unghiul dintre $(D'AM)$ și (DAM) este unghiul $D'MD$ a cărui măsură este de 45°.

Testul 25

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	–3	8	[1, 6)	12 π	60	21
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$\overline{ab}=3b+a$ și $b>a$	2p
	$9a=2b$ și $(2;9)=1$	2p
	$\overline{ab}=29$	1p
3.	Se notează cu x lungimea traseului	1p
	În prima zi parcurge $30\%\cdot x=\frac{6x}{20}$	1p
	În a doua zi parcurge $\frac{1}{2}\cdot 70\%\cdot x=\frac{7x}{20}$	1p
	$x-\frac{6x}{20}-\frac{7x}{20}=14$ $x=40$ km	1p 1p
4.	***a)*** Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	1p 2p 2p 1p
	b) $A(2m,-7)\in G_f \Rightarrow f(2m)=-7$	2p
	$f(2m)=-4m+1$	1p
	$-4m+1=-7$	1p
	$m=2$	1p
5.	$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$	2p
	$x^2-4x+4=(x-2)^2$	1p
	$\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+a}{x+b}$	1p
	$a+b=-5\in\mathbb{Z}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	***a)*** Lungimea muchiei cubului este egală cu 2 dm $V_{cub}=V_{miere}=8$ dm³ $V_{miere}=8$ litri	1p 2p 2p
	b) $V_{miere}=2$ litri $=2$ dm³ $=2000$ cm³ Notăm cu h înălțimea cerută și astfel $V_{miere}=20\cdot 20\cdot h=2000$ cm³ $h=5$ cm	1p 3p 1p 2p
	c) Desfășurăm $BCC'B'$ în planul $ABB'A'$ Drumul cel mai scurt se obține atunci când punctele A, M și C' sunt coliniare $[BM]$ linie mijlocie în triunghiul ACC' $BM=10$ cm	1p 1p 1p
2.	***a)*** $A_1=A_2=\frac{4\cdot 2}{2}=4$ dam² $A_3=\frac{2\cdot 2}{2}=2$ dam² Aria suprafeței cu gazon este egală cu $2\cdot A_1+A_3=10$ dam²	2p 1p 2p 2p
	b) Aria suprafeței terenului este egală cu $4^2=16$ dam² Aria suprafeței cu flori este egală cu $16-10=6$ dam² $6<10$, deci aria suprafeței cu flori nu este mai mare decât aria suprafeței cu gazon	2p 2p 1p 2p
	c) Folosind teorema lui Pitagora obținem $AB=AC=2\sqrt{5}$ dam și $BC=2\sqrt{2}$ dam Perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ dam $4\sqrt{5}=\sqrt{80}<\sqrt{81}=9$ și $2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}<9+3=12$ dam	1p 1p 1p 1p

Testul 26

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	–2	$\frac{3}{5}$	$(-\infty;3)$	24	90	9
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic	4p 1p
2.	$9 \cdot \overline{ab} = 2 \cdot \overline{ba}$	2p
	$8a = b$	2p
	$\overline{ab} = 18$	
3.	$m = 24 + f$	1p
	$m + 7 = 4(f + 7)$	1p
	$f = 1$	2p
	$m = 25$	1p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct	2p 2p
	Trasarea graficului funcției	1p
	b) $A(p,4) \in G_f \Rightarrow f(p) = 4$	2p
	$f(p) = 5 - 3p$	1p
	$5 - 3p = 4$	1p
	$p = \frac{1}{3}$	1p
5.	$\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{6}{x^2-4} = \frac{7x}{(x-2)(x+2)}$	3p
	$\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1 = \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) $DM = 12 - x$ Aplică teorema lui Pitagora și obține $CF = \sqrt{256 + (12-x)^2}$	3p 2p
	b) $A_{ABDC} = 12^2 = 144$ dam^2 $A_{BEFM} = 12x$ dam^2 $A_{teren} = 144 + 16x = 16(9 + x)$ dam^2	2p 2p 1p
	c) $A_{teren} = 16(9 + x) = 272$ dam^2 272 dam^2 = 2,72 ha 2,72 · 2,8=7,616 tone grâu	2p 1p 2p
2.	a) $A_{corp} = A_{cub}$ $A_{cub} = 6l^2 = 384$ cm^2	2p 3p
	b) $V_{cub} = l^3 = 512$ cm^3 $V_{decupat} = 8l^3 = 64$ cm^3 Finalizare	2p 2p 1p
	c) $V_{decupat} = 8x^3$ cm^3 $8x^3 = 256 \Rightarrow x^3 = 32$ și $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \emptyset$.	2p 3p

Testul 27

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	14	3	$4\sqrt{2}$	9 cm	60	$\frac{3}{4}$
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul Notează cubul	4p 1p
2.	$2 - 4\sqrt{2} + 4 - (2 - 2\sqrt{2} + 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1$	2p
	$6 - 4\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$	2p
	$3 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$	1p
3.	a-b = 18	2p
	a=3 · b+2	2p
	a=26, b=8	1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct	2p 2p
	Trasarea graficului funcției	1p
	b) $A(m,-2) \in G_f \Rightarrow f(m) = -2$	2p
	$-m + 1 = -2$	1p
	$-m = -3$	1p
	$m = 3$	1p
5.	$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$	1p
	$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$	2p
	$\frac{2x^2 - 7x - 17 - x^2 + 3x - x + 3}{(x-7)(x-3)} \cdot (x-3)(x+3) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x-7} \cdot (x+3) =$ $\frac{(x-7)(x+2)}{x-7} \cdot (x+3) = (x+2)(x+3)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $OC=\sqrt{VC^2-VO^2}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$cm $AC=\frac{12\sqrt{10}}{5}$cm , $AB=\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{288\sqrt{15}}{25}$cm^3	1p 2p 2p
	b) $OM=\frac{AB}{2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$cm $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm $\Rightarrow [VM]=[AB]$	2p 3p
	c) $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=6$cm $AE\perp VM$ $VA=AM=6$cm $\Rightarrow \Delta VAM$ isoscel şi AE = înălţime $\Rightarrow AE$ = mediană $\Rightarrow VE=\frac{VM}{2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$cm	1p 2p 2p
2.	*a)* R=10 m Aria suprafeţei lacului= π R ^{2} =100 π cm^2	2p 3p
	b) Aria supraf. cu gazon = Aria suprafeţei zonei de agrement – Aria suprafeţei lacului Aria suprafeţei cu gazon=600 –100π m^2 314<Aria suprafeţei lacului<315 285<Aria suprafeţei cu gazon<286 Aria suprafeţei cu gazon<Aria suprafeţei lacului	2p 1p 1p 1p
	c) $A_{\triangle DPM}=A_{ABCD}-A_{\triangle DAP}-A_{\triangle DCM}-A_{\triangle PBM}$ $A_{\triangle DPM}=600-200-150-50$ $A_{\triangle DPM}=200$m^2	2p 2p

Testul 28

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	154	$\frac{35}{56}$	[5,8)	30	$16\sqrt{3}$	7,5
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic	4p 1p
2.	$100a+10b+c=a+10b+100c\Rightarrow a=c$ Nr. cazuri posibile = 90 $\overline{abc}:5\Rightarrow c=5\Rightarrow$ Nr. cazuri favorabile = 10 $P=\frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile}=\frac{1}{9}$	2p 1p 1p 1p
3.	x – preţul iniţial 100% x –20% x = 80% x = y (noul preţ după ieftinire) 100% y + 20% y = 1152 lei 120% y = 1152 $\Rightarrow y=960$ lei 80% x = 960 $\Rightarrow x=1200$ lei	2p 1p 1p 1p
4.	**a)** Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcţiei	2p 2p 1p
	b) $A(x;0)\in G_f\Rightarrow f(x)=0$ $2\cdot x-4=0$ $2x=4$ $x=2$	2p 1p 1p 1p
5.	$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$ $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}=\frac{(x+1)}{(x-1)}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ $\frac{x^2-4}{x^2-1}:\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{1}=x^2-4$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* AB $\perp$ BB$'$, BC $\perp$ BB$'$, AM $\perp$ BC $\Rightarrow$ AM $\perp$ (BB$'$C$'$) $\Rightarrow$ d(A,(BB$'$C$'$)) = AM $\triangle$ABC echilateral, AM înălţime $\Rightarrow$ AM=$\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m	3p 2p
	b) $V_{cort}=A_b\cdot h$ $A_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$m^2 $V_{cort}=\frac{45\sqrt{3}}{4}$m^3	1p 2p 2p
	c) $A_t=A_l+2\cdot A_b$ $A_l=P_b\cdot h=45$ m^2 $A_t=45+\frac{9\sqrt{3}}{2}$ m^2 $45+\frac{9\sqrt{3}}{2}<54\Rightarrow\frac{9\sqrt{3}}{2}<9\Rightarrow\sqrt{60,75}<\sqrt{81}\Rightarrow$ sunt suficienţi cei 54 m^2 de pânză pentru confecţionarea cortului	1p 1p 2p 1p

2.	**a)** $A_{parcelă} = \frac{A_{ABCD}}{4}$ $A_{parcelă} = \frac{100}{4} = 25\text{ m}^2$	2p 3p
	b) $A_{parcelă} = l^2 \Rightarrow l = 5\text{m}$ $P_{parcelă} = 4l = 20\text{m} \Rightarrow l_{gard\ parcelă} = 20\text{m}$ $l_{gard\ grădină} = P_{grădină} + 4 \cdot l = 40 + 20 = 60\text{m}$	2p 2p 1p
	c) Din grădină se recoltează $50 \cdot 4 = 200$ kg roşii 1kg = 2,5 lei $\Rightarrow$ 200 kg = 500 lei	2p 3p

Testul 29

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-4	9	15	36 cm^2	$6\sqrt{3}$ cm	vineri
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$M_a = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{3}$ $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = 6^2 = 36$ Finalizare: 12	2p 2p 1p
3.	x=suma de bani pe care o deţine Radu y=suma de bani pe care o deţine Alexandra x+y=10 Cartea costă 10 – 5 = 5 lei Alexandra a avut iniţial 5 lei + 1 leu + 2 lei şi 50 de bani = 8 lei şi 50 de bani	1p 2p 2p
4.	**a)** Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcţiei	2p 2p 1p
	b) $A(5, 3a+1) \in G_f \Rightarrow f(5) = 3a+1$ $-5+3 = 3a+1$ $3a = -3$ $a = -1$	2p 1p 1p 1p
5.	$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ $\frac{x^2+4}{x^2-4} : \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2+4} = \frac{x+1}{x+2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $V_{paralelipiped} = a \cdot b \cdot c = 48\text{m}^3$ $36 \cdot V_{paralelipiped} = 1728\text{m}^3$ $V_{cub} = l^3 = 36 \cdot V_{paralelipiped} \Rightarrow l^3 = 1728 \Rightarrow l = 12\text{m}$	1p 1p 3p
	b) $A_t = 6l^2 = 864\text{m}^2$	5p
	c) $P = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}$ nr. cazuri posibile = $36 \cdot 12$, nr. cazuri favorabile = $36 \cdot 4$ $P = \frac{1}{3}$	1p 2p 2p
2.	**a)** $A_{gazon} = A_{ABCD} - A_{MNPQ}$ $A_{ABCD} = L \cdot l = 40 \cdot 20 = 800\text{ m}^2$ $A_{MNPQ} = L \cdot l = 20 \cdot 10 = 200\text{ m}^2$ $A_{gazon} = 600\text{m}^2$	2p 1p 1p 1p
	b) Notăm AM = x AC = AM + MP + PC = MP + 2x $MP = \sqrt{MQ^2 + QP^2} = 10\sqrt{3}$ m $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 20\sqrt{3}\text{ m}$ $x = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{ m}$	1p 1p 1p 2p
	c) $A_{MNPQ} = L \cdot l = 20 \cdot 10 = 200\text{ m}^2$ $200 : 25 = 8$ $8 < 9 \Rightarrow$ există cel puţin 2 peşti pe o suprafaţă de 25m^2	1p 2p 2p

Testul 30

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	2,2	b	2	7	36	(0;2),(2;4),(5;7)
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$A = \{5, 6, \ldots, a\}$ $B = \{0;3;6;9;12;15\ldots\}$ $Card(A \cap B) = 20 \Rightarrow A \cap B = \{6, 9, 12, \ldots, 63\} \Rightarrow a \in \{63, 64, 65\}$	1p 1p 3p

3.	Fie x = număr răspunsuri corecte , y = număr răspunsuri greşite $x+y=100$, $5x-3y=340$ Finalizare: $x=80$	2p 2p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcţiei	2p 2p 1p
	b) $A(0;y)\in G_f \Rightarrow f(0)=y$ $2\cdot 0-2=y$ $y=-2$	2p 2p 1p
5.	$\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+2}=\frac{(x+2)(2x+1)+(x-2)(1-2x)}{(x-2)(x+2)}=\frac{10x}{x^2-4}$ $\frac{10x}{x^2-4}+\frac{x^2+16}{x^2-4}=\frac{x^2+10x+16}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x+8)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+8}{x-2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) $V_{apă}=4l=4\,\text{dm}^3=4000\,\text{cm}^3$ $V_{apă}=V_{prismă}=A_b\cdot h_{apă}=l^2\cdot 8\Rightarrow l=10\sqrt{5}\,\text{cm}$	2p 3p
	b) $A_t=6l^2=6\cdot 500=3000\,\text{cm}^2$	5p
	c) $V_{cub}=l^3=5000\sqrt{5}\,\text{cm}^3=5\sqrt{5}$ litri $V_{\text{apă necesar umplerii cubului}}=V_{cub}-V_{apă}=(5\sqrt{5}-4)$ litri	2p 3p
2.	a) $A_{ABCD}=A_{AMPD}+A_{BMPC}=49\,\text{m}^2$ $A_{ABCD}=l^2=49\,\text{m}^2\Rightarrow l=7\,\text{m}$	2p 3p
	b) $A_{\Delta APB}=\frac{A_{AMPD}}{2}+\frac{A_{BMPC}}{2}$ $A_{\Delta APB}=\frac{49}{2}=24{,}5\,\text{m}^2$	3p 2p
	c) Se recoltează 30 kg roşii de pe 15 m^2 $\Rightarrow 30:15=2$ kg de pe 1 m^2 $2\,\text{kg}\cdot 34=68\,\text{kg}$ de pe 34 m^2	2p 3p

Testul 31

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	−3	100	0	4	18	75
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează trunchiul de piramidă Notează trunchiul de piramidă	4p 1p
2.	$a\cdot b=18$, $b\cdot c=36$, $a\cdot c=24$	1p

	$\frac{ab}{bc}=\frac{18}{36}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=2a$ $2a^2=24\Rightarrow a=2\sqrt{3}$, $c=4\sqrt{3}$, $b=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$	2p 2p
3.	Fie x = nr. elevi, y = nr. bănci $2(y-3)+1=x$, $3(y-6)=x$ $2y-6+1=3y-18$ Finalizare: $y=13$	1p 2p 2p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcţiei	1p 1p 3p
	b) $A(m+1,2m)\in G_f \Leftrightarrow f(m+1)=2m$ $f(m+1)=3(m+1)-6=3m-3$ Finalizare: $m=3$	2p 2p 1p
5.	$-6<x<6 \mid +2$ $-4<x+2<8 \mid :3$ $-\frac{4}{3}<\frac{x+2}{3}<\frac{8}{3}$ determinarea necunoscutei: $x\in\{-5,-2,1,4\}$	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) $V_{prismă}=A_b\cdot h$ $A_{\triangle ABC}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ $V_{ABCMNP}=54\sqrt{3}\ \text{cm}^3$	1p 2p 2p
	b) Triunghiul MNC este isoscel cu $MC=NC$ $d(C,MN)=CQ$ unde Q este mijlocul laturii MN $CQ=\sqrt{MC^2-MQ^2}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ cm	1p 2p 2p
	c) Determinarea unghiului diedru. $\sin(\sphericalangle(ABP),(ABC))=\frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$	2p 3p
2.	a) $EB=AB-AE=6$ cm $BC=\sqrt{CE^2+EB^2}=10$ cm Perimetrul patrulaterului ABCD este egal cu 32 cm	1p 2p 2p
	b) Aria suprafeţei BEC este egală cu $\frac{CE\cdot EB}{2}=24\ \text{cm}^2$ Aria suprafeţei cu grâu este egală cu $AD\cdot AE=32\,\text{cm}^2$ $p\%$ din $A_{ADCE}=A_{BEC}$ $\frac{p}{100}\cdot 32=24\Rightarrow p=75\,\%$	1p 1p 1p 2p

	c) Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul AEC obținem $AC = 4\sqrt{5}$ cm	1p
	Triunghiul ABC este isoscel cu AB = BC $\Rightarrow d(B,AC) = BM$, unde M este mijlocul lui AC	2p
	Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul MBC obținem $MB = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{100-20} = 4\sqrt{5}$ cm	2p

Testul 32

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	– 17	3	7	6	12	60
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)^2 =$	2p
	$3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2(3-1) + 3 - 2\sqrt{3} + 1 =$	2p
	$4 \in \mathbb{N}$	1p
3.	Fie x prețul inițial. După reducerea cu 25%, televizorul costă $75\% \cdot x = \frac{3}{4}x$	1p
	După mărire, ajunge la $\frac{3x}{4} + 20\% \cdot \frac{3x}{4} = \frac{9x}{10}$	2p
	$\frac{9x}{10} = 3600 \Rightarrow x = 4000$	2p
4.	*a)* Reprezintă un punct	2p
	Reprezintă al doilea punct	1p
	Trasarea graficului funcției	2p
	b) $A(m+1,-7) \in G_f \Rightarrow f(m+1) = -7$	3p
	$m = 2$	2p
5.	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	2p
	$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$	2p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	*a)* $V_{cub} = a^3$, unde a este lungimea muchiei	3p
	$V_{cub} = 1000\ \text{cm}^3$	2p
	b) $A_{lat} = P_b \cdot h = 2 \cdot (L+l) \cdot h$	3p
	$A_{lat} = 2100\ \text{cm}^2$	2p
	c) Dacă x exprimă cu cât a scăzut nivelul apei după golirea unei părți în cub, atunci volumul apei din cub este egal cu al paralelipipedului dreptunghic de bază $ABCD$ și înălțime egală cu x	3p
	$x = \frac{V_{cub}}{L \cdot l} = \frac{1000}{25 \cdot 10} = 4$ cm	2p

2.	*a)* $A_{albastră} = MN \cdot NP$	3p
	$A_{albastră} = 60\ \text{cm}^2$	2p
	b) $A_{coală} = AB \cdot BC = 96\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{albă} = A_{coală} - A_{albastră} = 36\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{albă} < A_{albastră}$	1p
	c) Fie $NE \perp DC$, $E \in DC$; atunci $DE = 2$, $NE = 2$	2p
	Triunghiul END este dreptunghic în E, deci $DN^2 = DE^2 + NE^2$	2p
	$DN = 2\sqrt{2}$ cm	1p

Testul 33

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	–356	36	3	$2\sqrt{17}$	50	24
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează prisma	4p
	Notează prisma	1p
2.	$a + b \leq 48$	1p
	$a : b = 5$ rest $6, b > 6$	1p
	$a = 5 \cdot b + 6$	1p
	$6 \cdot b + 6 \leq 48$	1p
	$b \leq 7$ și $b > 6 \Rightarrow b = 7$	1p
	$a = 41$	2p
3.	$m_g = \sqrt{x \cdot y}$	2p
	$m_g = \sqrt{(2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$	1p
	$m_g = 2$	2p
4.	$A(-2, m+6) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = m+6$	2p
	$-2(m+1)+5 = m+6$	1p
	$-3m = 3$, deci $m = -1$	2p
5.	*a)* $E(x) = \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)} + \frac{1}{x-3}$	1p
	$E(x) = 1 + \frac{1}{x-3}$	2p
	$E(x) = \frac{x-2}{x-3}$	

	b) $\frac{x-2}{x-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow (x-3)\mid(x-2)$	2p
	$(x-3)\mid(x-3)\Rightarrow (x-3)/(x-2-x+3)\Rightarrow (x-3)/1\Rightarrow (x-3)\in D_1=\{-1,1\}$	1p
	$x\in\{2,4\}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $A_l=P_b\cdot h$	
	$324\sqrt{6}=36\sqrt{2}\cdot h$	1p
	$h=9\sqrt{3}$ m	2p
		2p
	b) $V_{cutie}=A_b\cdot h$	
	$V_{cutie}=1458\sqrt{3}\,m^3\cong 2522{,}34\ m^3$	1p
	$V_{pachet}=L\cdot l\cdot h=3\cdot 4\cdot 6=72\,m^3$	2p
	$2522{,}34:72=35{,}0325\Rightarrow$ încap 34 pachete în cutie	1p
		1p
	c) Fie $AC\cap BD=\{O\}$	
	$FB\perp(ABCD)$, $AC\subset(ABCD)$	2p
	$BO\perp AC, BO\subset(ABCD)\Rightarrow FO\perp AC\Rightarrow d(F,AC)=FO$	1p
	$FO=\sqrt{FB^2+OB^2}=\sqrt{243+81}=\sqrt{324}=18\,m$	2p
2.	a) $L_{gard}=AB+BC+CD+DA$	1p
	$AD=BC=2\sqrt{2}$ m	1p
	$AB=8$ cm	1p
	$L_{gard}=(12+4\sqrt{2})\,m$	2p
	b) Aria suprafeței grădinii $=3\cdot A_{\triangle ADE}=3\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}=3\cdot 4=12\,m^2$	3p
	$9\cdot 12=108$ butași	2p
	c) Construim $CF\perp AB$	1p
	$CF=\frac{EC\cdot CB}{EB}=2\,m$	2p
	Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACF obținem:	2p
	$AC=\sqrt{AF^2+FC^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\,m$	

Testul **34**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	–5	4	$\frac{2}{5}$	6	36	27
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$A=\sqrt{(2013-1)^2}$	2p
	$A=\sqrt{2012^2}$	2p
	$A=2012\in\mathbb{N}$	1p
3.	Se notează cu x numărul pachetelor de 20 g	1p
	$20x+(128-x)\cdot 25=3000$	2p
	$\Rightarrow x=40$ pachete de 20 g	1p
	$128-40=88$ pachete de 25 g	1p
4.	*a)* Reprezintă un punct	2p
	Reprezintă al doilea punct	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
	b) $M(a,a+1)\in G_f\Rightarrow f(a)=a+1$	2p
	$f(a)=3-a$	1p
	$3-a=a+1$	1p
	$a=1$	1p
5.	$x^2-6x+9=(x-3)^2$	2p
	$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$	2p
	$E(x)=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $V=L\cdot l\cdot h$	3p
	$V=14\cdot 8\cdot 4=448\,m^3$	2p
	b) $A_{bazei}=14\cdot 8=112\,m^2$	
	x,z,y ariile suprafețelor necesare fiecărei echipe	1p
	$\{x,y,z\}$ direct proporționale cu $\{3,5,6\}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}=k$	2p
	$\left.\begin{matrix}x=3k, y=5k, z=6k\\ x+y+z=112\end{matrix}\right\}\Rightarrow k=8$	1p
	$x=24\,m^2, y=40\,m^2, z=48\,m^2$	1p
	c) $A_{plafon}=112\,m^2$	2p
	$A_{laterala}=P_{bazei}\cdot h=176\,m^2$	2p
	$A_{pavilion}=A_{plafon}+A_{laterală}=288\,m^2$	1p
2.	*a)* $A_{parc}=L\cdot l=157000\,m^2$	2p
	$A=\frac{20}{100}\cdot 157000=31400\,m^2$ aria zonei plantate cu flori	3p

	b) $A_{cerc}=\pi R^2$	1p
	Aria suprafeței cu flori este egală cu $31400=3{,}14\cdot R^2\Rightarrow R^2=10000$	2p
	$R=\sqrt{10000}=100\,\text{m}$	2p
	c) $L_{gard}=2(L+l)+2\pi R$	2p
	$L_{gard}=2(157+1000)+2\cdot 3{,}14\cdot 100=2942\,\text{m}$	2p
	Prețul gardului este $2942\cdot 14{,}5=42659\,\text{lei}$	1p

Testul 35

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	6	6	$\frac{1}{2}$	16	60	$\frac{65}{9}$
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează conul circular drept	4p
	Notează conul circular drept	1p
2.	$-2\le 3x+1\le 8\Leftrightarrow -3\le 3x\le 7\Leftrightarrow -1\le x\le\frac{7}{3}$	3p
	$A=\{-1,0,1,2\}$	1p
	$A\cap\mathbb{N}=\{0,1,2\}$	1p
3.	$\left.\begin{matrix}a+b+c=120\\ a+c=4b\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4b+b=120\Rightarrow b=24$	2p
	Cazul I: $a=16$	1p
	$16+24+c=120\Rightarrow c=80$	
	Cazul II: $c=16$ și $a=80$	1p
4.	**a)** $G_f\cap G_g\Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-1=x+1\Rightarrow x=2$	2p
	$f(2)=3$	2p
	$A(2,3)$	1p
	b) $G_f\cap Oy\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ f(0)=-1\end{cases}\Rightarrow B(0,-1)$	1p
	$G_g\cap Oy\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ g(0)=1\end{cases}\Rightarrow C(0,1)$	1p
	Reprezintă grafic cele două funcții	2p
	$A_{\triangle ABC}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$	1p

5.	$(2x+1)(1-2x)=1-4x^2$	1p
	$(2x+3)^2=4x^2+12x+9$	1p
	$-3(4x-1)=-12x+3$	1p
	$E(x)=1-4x^2+4x^2+12x+9-12x+3=13$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $A_{totală}=2(L\cdot l+L\cdot h+h\cdot l)$	2p
	$L=2{,}5\,\text{m}=250\,\text{cm}, h=0{,}8\,\text{m}=80\,\text{cm}$	1p
	$A_{totală}=2(250\cdot 30+250\cdot 80+30\cdot 80)=59800\,\text{cm}^2=5{,}98\,\text{m}^2$	2p
	b) $V=L\cdot l\cdot h$	2p
	$V=250\cdot 30\cdot 80\,\text{cm}^3=600000\,\text{cm}^3$	1p
	$V=600000\,\text{cm}^3=600\,\text{dm}^3=600\,\text{litri}$	2p
	c) $\frac{10}{100}\cdot 420=42\,\text{lei}$	2p
	Prețul plătit începând cu al șaselea calorifer $420-42=378\,\text{lei}$	1p
	Prețul total plătit este $420\cdot 5+378\cdot 4=3612\,\text{lei}$	2p
2.	**a)** $A_{ABCD}=AB\cdot BC=2400\,\text{cm}^2$	1p
	$\left.\begin{matrix}A_{\triangle AMD}+A_{DCBM}=A_{ABCD}\\ A_{DCBM}=5A_{\triangle AMD}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 6A_{\triangle AMD}=2400\,\text{cm}^2\Rightarrow A_{\triangle AMD}=400\,\text{cm}^2$	2p
	$A_{\triangle AMB}=\frac{AD\cdot AM}{2}\Rightarrow AM=20\,\text{cm}$	2p
	b) $P_{dreptunghi}=2(L+l)=20\,\text{cm}$	1p
	$AM=30\,\text{cm}$	3p
	Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle AMD\Rightarrow MD^2=AD^2+AM^2\Rightarrow MD=50\,\text{cm}$	1p
	$P_{\triangle AMD}=AM+AD+MD=120\,\text{cm}$	
	$\frac{x}{100}\cdot 200=120\Rightarrow x=60\%$	2p
	c) $\{AM, MB\}$ invers proporționale cu $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}\Rightarrow\frac{AM}{2}=\frac{MB}{4}=k$	2p
	$\left.\begin{matrix}AM=2k, MB=4k\\ AM+MB=AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow k=10$	1p
	$AM=20\,\text{cm}, MB=40\,\text{cm}$	2p
	Linia mijocie este egală cu 50 cm	

Testul 36

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	10	0	$\frac{2}{5}$	45	288	13
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}\Rightarrow a=\frac{2b}{5}$	1p
	$3\cdot b=4\cdot c\Rightarrow c=\frac{3b}{4}$ $c-a=14$ $\frac{3b}{4}-\frac{2b}{5}=14\Rightarrow 15b-8b=280$	1p 1p 1p
	$b=40$ $a=16,\ c=30$	1p
3.	$a=4-\left(-2+\sqrt{5}\right)-\left(3-\sqrt{5}\right)$ $a=3$	3p 2p
4.	*a)* $A(0,-2)\in G_f\Rightarrow f(0)=-2\Rightarrow b=4$ $B(1,2)\in G_f\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow a=4$ *b)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	3p 2p 2p 2p 1p
5.	$a^2-4a+4+9b^2+6b+1=0$ $(a-2)^2+(3\cdot b+1)^2=0$ $a=2, b=-\frac{1}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $A_t=4\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $A_t=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$	2p 3p
	b) $\sin x=\frac{h}{a_p}$ $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p 3p
	c) Fie punctul M mijlocul segmentului $[AB]$ $[PT]$ este linie mijlocie în triunghiul AMD $PT=\frac{DM}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$	1p 2p 2p
2.	*a)* $L_{roată}=2\pi R$ $8\pi=2\pi R\Rightarrow R=4\text{cm}$ $AC=8\text{ cm}$	2p 2p 1p

	b) $m\sphericalangle(AOB)=60^\circ$ $\triangle AOB$ echilateral Aria suprafeței $AOB=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}\text{cm}^2$	1p 2p 2p
	c) $L_{roată}=8\cdot 3{,}14=25{,}12\text{cm}=0{,}2512\text{m}$ $L_{pistă}=800\text{m}$ Numărul rotațiilor complete pe care le face roata pentru a parcurge pista este egal cu: 800:0,2512=3184	2p 1p 2p

Testul 37

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	0	45	$\frac{3}{4}$	$6\sqrt{3}$	100	7,84
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul Notează paralelipipedul	4p 1p
2.	$a+b=\frac{22}{9}$ $a-b=\frac{6}{5}$ $a=\frac{82}{45}, b=\frac{28}{45}$	2p 1p 2p
3.	$x^2+y^2-4x-6y+13=(x-2)^2+(y-3)^2$ $x=2,\ y=3$	3p 2p
4.	*a)* Reprezentarea unui punct de pe grafic Reprezentarea altui punct de pe grafic Trasarea graficului (o dreaptă)	2p 1p 2p
	b) $f(1)+f(2)+\ldots+f(50)=2\cdot(1+2+\ldots+50)+50$ $1+2+\ldots+50=\frac{50\cdot 51}{2}$ $f(1)+f(2)+\ldots+f(50)=2600$	2p 2p 1p
5.	$x+3+\frac{10}{x-3}=\frac{x^2+1}{x-3}$ $\frac{x^2-6x+9}{x^3-3x^2+x-3}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{x-3}{x^2+1}$ Finalizare	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$; atunci $BE = AB - CD = x - 6$ şi $CE = AD = 30$ $BC^2 = CE^2 + BE^2 \Rightarrow x^2 = (x-6)^2 + 30^2 \Rightarrow x = 78$ m $P_{ABCD} = 4x + 26 = 338$ m	1p 2p 2p
	b) $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AD \cdot (AB + CD)}{2}$ $\mathcal{A}_{ABCD} = 3450$ m^2	3p 2p
	c) $MN = \frac{AB + CD}{2} = 115$ m $P_{ABMN} = 320$ m	2p 3p
2.	*a)* $V_{gheață} = L_{gheață} \cdot l_{gheață} \cdot h_{gheață}$ $V_{gheață} = 960$ dm^3	3p 2p
	b) $V_{bazin} = l^3$ $V_{bazin} = l^3 = 1728$ dm^3	2p 3p
	Apa are volumul egal cu 864 litri $V_{apă} + V_{gheață} = 864 + 960 = 1824 > 1728 = V_{bazin}$ Finalizare	2p 2p 1p

Testul 38

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	9	7	400	137°30'	60°	- 4°
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cilindrul circular drept	5p
2.	x numărul băieţilor, $2x$ numărul fetelor $x + 2x = 33$, $3x = 33$, $x = 11$ băieţi $11 \cdot 2 = 22$ fete	2p 2p 1p
3.	$n = 5\sqrt{11} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{11} - \sqrt{11}$ $n = 0$	3p 2p
4.	*a)* f(1) = 4 a −2 + 3 = 4 a = 3	2p 2p 1p
	b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, M(- 3,0), N(0,3) $OM = 3; ON = 3; MN = 3\sqrt{2}; OP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$	2p 3p
5.	$(x+3)^3 - 16(x+3) = (x+3)[(x+3)^2 - 16]$ $(x+3)(x+3-4)(x+3+4) = (x+3)(x-1)(x+7)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* 4·CB = 40, CB = 10 dam; EB = 6 dam; DC = AB – 2EB = 18 –12 = 6 dam A_{ABCD} = 96 ari	3p 2p
	b) A_{BEC} = 24 ari 96·p% = 24; p = 25%	3p 2p
	c) P_{ABCD} = 44 dam = 440 m 440·15,5 = 6820 lei	3p 2p
2.	*a)* A = 2(L·l + L·h + l·h) = 3,88 m^2 pentru un calorifer 3,88 ·12 = 46,56 m^2	3p 2p
	b) V = L·l·h = 0,28 m^3 0,28 m^3 = 280 dm^3 =280 litri	3p 2p
	c) 46,56 · 35 = 1629,6 lei	5p

Testul 39

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	0	F	8	24	3	220
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma Notează prisma	4p 1p
2.	$\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ $\sqrt{5^2 \cdot 4^2} = 20$ $A = n \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 2^2 \Rightarrow n = 3 \cdot 5 = 15$	2p 1p 2p
3.	$n = 12x + 9 = 15y + 12 = 18z + 15$ $n + 3 = 12x + 12 = 15y + 15 = 18z + 18$ $n + 3 = [12,15,18]$, $n = 177$	2p 2p 1p
4.	*a)* f(2) = 3 ; g(2) = 3 $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 2b = 6 \end{cases}$ $a = 0; b = 3$ f(x) = 3; g(x) =3x - 3	2p 1p 2p 1p
	b) Reprezentarea unui punct de pe grafic Reprezentarea altui punct de pe grafic Trasarea graficului (o dreaptă)	2p 2p 2p
5.	$4x^2 - 4\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + (\sqrt{2})^2 = 0$ $(2x - \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 0$ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}; y = -\sqrt{2}$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* AB = AE = 20 m, EB = $20\sqrt{2}$ m; $A_{EBC} = 400\ m^2$; EC = 40 m; $A_{ECD} = 800\ m^2$ $A_{ABCDE} = 200 + 400 + 800 = 1400\ m^2$	3p 2p
	b) AB = AE = 20 m; BC = $20\sqrt{2}$ m; CD = 40 m; ED = $40\sqrt{2}$ m $P_{ABCDE} = 80 + 60\sqrt{2}$ m.	3p 2p
	c) EA // DF; EA = DF = 20 m AFDE paralelogram.	3p 2p
2.	*a)* V = L·l·h; V = 8·2,5·3 V= 60 m^3	3p 2p
	b) $V_{cutie} = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,6 = 0,075\ m^3$ 60 : 0,075 = 800 cutii	3p 2p
	c) 800·2= 1600 bidoane cu apă 1600·5 = 8000 litri	3p 2p

Testul 40

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	4	2	2300	$8\sqrt{3}$	25	29°C
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează trunchiul de piramidă Notează trunchiul de piramidă	4p 1p
2.	59 – 3 = 56 kg; 67 – 4 = 63 kg $56 = 2^3 \cdot 7$; $63 = 3^2 \cdot 7$ (56; 63) = 7 kg	2p 2p 1p
3.	$-7 \le 2x - 5 \le 7; -2 \le 2x \le 12; -1 \le x \le 6$ $A = \{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ $-4 \le 4x + 8 < 28; -12 \le 4x < 20; -3 \le x < 5$ $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ $A \cap B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, $A \setminus B = \{5,6\}$	2p 2p 1p
4.	*a)* f(2) = 7 ; f(-1) = - 8; $\begin{cases} 2a + b = 7 \\ -a + b = -8 \end{cases}$ $a = 5$; $b = -3$	2p 2p 1p
	b) $f(x) = 5x - 3$ $y = 0$, $x = \frac{3}{5}$; M($\frac{3}{5}$;0) ; N(0;-3) $A = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$	1p 2p 2p
5.	$E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 - 3x^2 + 15$ $E(x) = x^2 + 6x + 11$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $AB = 12$ m; $BC = 4$ m A_{ABCD} =AB·BC $A_{ABCD} = 48\ m^2$	3p 2p
	b) $A_{cerc} = \pi r^2$ $A_{ronduri} = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$ $A_{ronduri} = 8 \cdot 3,14 = 25,12$ A_{iarba}=48 –25,12 = 22,88 m^2	3p 2p
	c) 240·2 = 480 lalele; 180·2 = 360 pansele 480·3,5 +360·2,5 =2580 lei	3p 2p
2.	*a)* V = L·l·h; V = 6·5·4 V= 120 m^3	3p 2p
	b) 90000 l = 90000 dm^3 = 90 m^3; h_{apa} = 90:30 = 3 m	3p 2p
	c) Prin 4 robinete curg 40 l / s 90000 / : 40 l / s = 2250 s = 37 min 3 s.	3p 2p

Testul 41

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	20	5p
2.	20	5p
3.	18	5p
4.	20	5p
5.	90°	5p
6.	10	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma	4p
	Notează prisma	1p
2.	$x_1 = -3$, $x_2 = -2$	3p
	$m_a = -2,5$	2p
3.	Notăm cu x lungimea traseului	1p
	În prima zi a parcurs: $\frac{x}{4}$ km	2p
	A doua zi a parcurs: $\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ km	2p
	$x - \frac{x}{2} = 12 \Rightarrow x = 24$ km	2p
4.*a)*	$f(-2) = 4 \cdot (-2) - 4$	3p
	$f(-2) = -12$	2p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	1p
	Trasarea graficului funcţiei	2p
5.	$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$	

	$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$	2p
	$E(x)=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{2}=x$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$L_{gard}=3\cdot 6+3\pi$ m	2p
	$L_{gard}=18+3\pi$ m	3p
b)	$m(\sphericalangle DBC)=m(\sphericalangle MBC)=45^\circ$	2p
	$d(M,BD)=MB=3\sqrt{2}$ m	3p
c)	$A_{ABCD}=36$ m^2	1p
	$A_{semidisc}=\frac{9\pi}{2}$ m^2	2p
	$36+\frac{9\pi}{2}<36+\frac{9\cdot 3,15}{2}=50,175<51$	2p
2.a)	Volumul este maxim atunci când cercurile de la bazele cilindrului circular drept sunt tangente la laturile bazelor cubului	2p
	$R=\frac{AB}{2}=15$ cm	3p
b)	$V_{eliminat}=V_{cub}-V_{cilindru}$	2p
	$V=30^3-\pi\cdot 15^2\cdot 30=27000-6750\pi$ cm^3	3p
c)	Lungimea traseului este egală cu lungimea segmentului $[MP]$, pe desfășurarea suprafeței laterale a colindrului circular drept	2p
	$L_{traseu}\overset{T.P.}{=}15\sqrt{4+\pi}$ cm	3p

Testul 42

SUBIECTUL I

1.	1,3	5p
2.	65	5p
3.	0	5p
4.	6	5p
5.	60°	5p
6.	48	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează trunchiul de piramidă	4p
	Notează trunchiul de piramidă	1p
2.	4 este soluție a ecuației $\Rightarrow 16-4a+20=0\Rightarrow a=9$	2p
	$x_2=5$	2p
	$m_g=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	1p
3.	Se notează cu x numărul meselor cu trei picioare și cu y numărul meselor cu patru picioare	2p
	$x+y=30$ $3x+4y=108$	2p
	$y=18$	2p
4.a)	$f(a)=-2a+2$	2p
	$f(2a)=-4a+2$	1p
	$f(a)-f(2a)=-2a+2+4a-2=2a$	3p
b)	$A(1,0);\ B(0,2)$	2p
	$tg(\sphericalangle OAB)=2$	2p
5.	$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$	2p
	$E(x)=\left(\frac{4}{x-1}+3\right)\cdot\frac{x-1}{2(3x+1)}$	1p
	$E(x)=\frac{3x+1}{2(3x+1)}=\frac{1}{2}$	

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$P_{ABC}=AB+BC+AC$	2p
	$P_{ABC}=24$ km	3p
b)	$A-B-M=6+\frac{20}{3}=\frac{38}{3}$ km	2p
	$A-C-M=8+\frac{10}{3}=\frac{34}{3}$ km	2p
	$34<38\Rightarrow$ grupul care merge pe traseul A-C-M ajunge mai repede	1p
c)	Fie $AP\perp BC, P\in(BC)\Rightarrow AP=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$ km	2p
	Din teorema catetei obține $CP=\frac{32}{5}$ km $\Rightarrow MP=\frac{46}{15}$ km	2p
	Finalizare: teorema lui Pitagora în triunghiul APM	1p
2.a)	$d(C,BC')\cdot 10=8\cdot 12$ cm	2p
	$d=\frac{48}{5}$ cm	3p
b)	$A_l=\pi RG$	2p
	$A_l=60\pi$ cm^2	3p
c)	$V=\frac{\pi R^2 h}{3}$	1p
	$V=96\pi$ cm^3	2p
	$96\pi>96\cdot 3,14=301,44>300$ cm$^3=0,3$ litri	2p

Testul 43

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{4}{45}$	5p
2.	125%	5p
3.	6	5p
4.	48	5p
5.	60	5p
6.	13	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$4\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2-8\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)+1=0$	2p
	$7+4\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}+1=0$	
	Finalizare	2p
3.	$\overline{bc}=9\cdot a$	1p
	$10\overline{bc}+a=100a+\overline{bc}-108\Rightarrow 90a+a=100a+9a-108$	1p
	$a=6,\ \overline{bc}=54\Rightarrow \overline{abc}=654$	2p
4. *a)*	$\frac{f(2)+f(4)}{2}=\frac{4}{2}=2$	2p
	$f\left(\frac{2+4}{2}\right)=f(3)=2$	2p
	Finalizare	2p
b)	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f	1p
	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Trasarea graficului funcţiei	2p
5.	$E(x)=\left(\frac{x^2-4x+4+3x^2+6x-2x-4}{(x+2)^2}\right)\cdot\frac{x+2}{2x}$	1p
	$E(x)=\frac{4x^2}{2x(x+2)}$	2p
	$E(x)=\frac{2x}{x+2}$	2p
		1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. *a)*	$P=6+6+6+6-x+x+x+x$	2p
	$P=24+2x=2(12+x)$ dam	3p
b)	$[BD]$ şi $[BF]$ sunt diagonale în pătratele $ABCD$ şi $BGFE$	2p
	$m(\sphericalangle DBF)=m(\sphericalangle DBC)+m(\sphericalangle EBF)=45^\circ+45^\circ=90^\circ$	3p

c)	$x^2=\frac{1}{4}\cdot\left(36+x^2\right)$	2p
	$4x^2=36+x^2$	1p
	$x=2\sqrt{3}$	2p
2.*a)*	Fie $DP\perp AB, P\in(AB)$	1p
	$AP=3$ cm $\overset{P30^\circ}{\Rightarrow} AD=6$ cm	2p
	Teorema lui Pitagora în triunghiul ADP: $OO'=DP=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ cm	2p
b)	Triunghiul VAB este echilateral, $\{V\}=AD\cap BC$	2p
	$d(A,BC)=\frac{l\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ cm	3p
c)	$A_l=\pi G(R+r)=54\pi$ cm^2	1p
	$54\cdot 3{,}14<54\pi<54\cdot 3{,}15\Leftrightarrow 169{,}56<54\pi<170{,}1$	2p
	Necesar cutii vopsea $\frac{169{,}56\cdot 4}{12}<\frac{54\pi\cdot 4}{12}<\frac{170{,}1\cdot 4}{12}$ sau 56,52<nr. cutiu□e<56,7	1p
	Necesarul este de 57 de cutiu□e	1p

Testul 44

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	0	5p
2.	$\frac{9}{10}$	5p
3.	$(-\infty,3]$	5p
4.	12	5p
5.	$5\sqrt{2}$	5p
6.	50	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează trunchiul de piramidă	4p
	Notează trunchiul de piramidă	1p
2.	$a+b=45;\ a=5b+3$	3p
	Finalizare $b=7;\ a=38$	2p
3.	$2015=3\cdot 671+2\Rightarrow 2015\in A$	2p
	$2015=2\cdot 1006+3\Rightarrow 2015\in B$	2p
	Finalizare $2015\in A\cap B$	1p
4.*a)*	$f(2)\cdot f(3)=0$	2p
	$f(2\cdot 3)=-3$	2p
	Finalizare $f(2)\cdot f(3)\neq f(2\cdot 3)$	1p
b)	$M(a^2,2a)\in G_f\Rightarrow f(a^2)=2a$	2p

	$a^2+2a-3=0$	
	$a_1=-3,\ a_2=1$	2p
5.	$E(x)=4x^2-12x+9+2(10x-15-4x^2+6x)+25-20x+4x^2$	1p
	$E(x)=4x^2-12x+9+20x-30-8x^2+12x+25-20x+4x^2$	2p
	$E(x)=4$	2p
		1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Notăm piramida $VABC$ și cu O centrul bazei $ABC \Rightarrow OA=\sqrt{3}$ cm	
	Finalizare: $VO=1$ cm	2p
b)	$A_{rosu}=27\pi$ cm^2	3p
	$A_{galben}=72\sqrt{3}-27\pi$ cm^2	1p
	$54\pi\in(169{,}56;170{,}1)$ și $72\sqrt{3}\in(124{,}56;125{,}28)$	1p
	$72\sqrt{3}<54\pi \Leftrightarrow 72\sqrt{3}-27\pi<27\pi \Rightarrow A_{rosu}<A_{galben}$	1p
c)	AB tangentă la cerc $\Rightarrow OP\perp AB$	2p
	DC tangentă la cerc $\Rightarrow OS\perp DC$	2p
	$AB\parallel CD \Rightarrow P,O,S$ coliniare	2p
2.a)	$6\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=54\sqrt{3}$	1p
	$l=AB=AA'=6$ cm	2p
b)	$DF'\parallel CA' \Rightarrow m(\sphericalangle AC',DF')=m(\sphericalangle AC',CA')$	3p
	$AC=6\sqrt{3}$ cm, $AA'=6$ cm și $ACC'A'$ dreptunghi $\Rightarrow CA'=12$ cm	2p
	$m(\sphericalangle AC',DF')=m(\sphericalangle AC',CA')=60^\circ$	2p
c)	$AC\perp CD$	1p
	$AC\perp CC'$	1p
	În concluzie, $AC\perp(CDD'C')$	1p
	$d(C,(CDD'))=AC=6\sqrt{3}$ cm	1p
		2p

Testul 45

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	11	{0;1}	$\frac{1}{2}$	56	4	33
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează tetraedrul	4p
	Notează tetraedrul	1p
2.	20% din 30 = 6, deci în clasă sunt 6 fete	3p
	30 − 6 = 24, deci în clasă sunt 24 băieți.	2p
3.	Numărul de pagini citite este: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$	1p
	$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$	1p
	$2^{n+1}-1=127 \Rightarrow 2^{n+1}=128 \Rightarrow n=6$	2p
	Deci, după 7 zile va fi citit 127 pagini.	1p
4.	a) $(2x-1)^2=4x^2-4x+1;\ (x-1)^2=x^2-2x+1$	2p
	$E(x)=x^2+3x-1$	3p
	b) $E(x)=3 \Leftrightarrow x^2+3x-1=3 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0$	1p
	$\Delta=25$	2p
	$x_1=-4, x_2=1$	2p
5.	$f(1)=1\neq 2 \Rightarrow A(1;2)\notin G_f$	3p
	$f(-2)=-5 \Rightarrow B(-2;-5)\in G_f$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) $P_{ABCDEF}=6l$	1p
	$P_{ABCDEF}=72$ cm	4p
	b) ΔBOC echilat. $\Rightarrow h=OM=6\sqrt{3}$ cm	1p
	ΔVOM dr. $\overset{TP}{\Rightarrow} VM=12\sqrt{3}$ cm	2p
	$A_l=432\sqrt{3}$ cm^2	2p
	c) $\frac{A_{hasurată}}{A_{pir.}}=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{VO'}{VO}\right)^2=\frac{1}{2}$	2p
	$VO'=9\sqrt{2}$ cm	1p
	$9\sqrt{2}>12{,}5 \Leftrightarrow \left(9\sqrt{2}\right)^2>12{,}5^2 \Leftrightarrow 162>156{,}25(A)$	2p
2.	a) $A_{ABCD}=l^2$	1p
	$A_{ABCD}=1600$ m^2	4p
	b) Arcul $\overset{\frown}{MN}$ reprezintă un sfert de cerc	1p
	$L_{cerc}=40\pi$	2p
	$L_{\overset{\frown}{MN}}=10\pi$ m	2p
	c) $A_{gazon}=200\pi$ m^2	1p
	$A_{pietris}=A_{curte}-A_{gazon}=1600-200\pi$ m^2	2p
	Cum $3{,}14<\pi<3{,}15 \Rightarrow A_{gazon}<630$ m^2, iar $A_{pietris}>970$ m^2, deci $A_{pietris}>A_{gazon}$	2p

Testul 46

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	100	$\frac{1}{3}$	1	$4\sqrt{3}$	32	Raluca
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează prisma Notează prisma	4p 1p
2.	$x+10\%x=\frac{11x}{10}$ $\frac{11x}{10}+\frac{10}{100}\cdot\frac{11x}{10}=\frac{121x}{100}$ $\frac{121x}{100}=121$ lei $\Rightarrow x=100$ lei	1p 2p 2p
3.	$c+g=20\Rightarrow g=20-c$ $10c-5g=170$ $10c-5(20-c)=170$ $c=18$	1p 1p 1p 2p
4.	*a)* $\Delta=1$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $S=\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$ *b)* $2x^2+3x+1=(2x+1)(x+1)$ $E(x)=3$	2p 1p 2p 2p 3p
5.	$A(1;3)\in G_f\Rightarrow f(1)=3$ $f(1)=2a-1\Rightarrow 2a-1=3\Rightarrow a=2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* $A_{ABCD}=L\cdot l$ $A_{ABCD}=1500$ cm^2	1p 4p
	b) $V_{paral.}=30000$ cm^3 $V_{cil.}=5625\pi$ cm^3 $V_{cufăr}=30000+5625\pi$ cm^3	2p 2p 1p
	c) Distanța maximă este $[IB]$. Fie $IP\perp AD, P\in(AD)\Rightarrow IP=35$ cm Din teorema lui Pitagora în triunghiul IPB ob□inem $IB=\sqrt{3950}$ cm $62=\sqrt{3844}<\sqrt{3950}$, cm, deci în cufăr încape un băț de lung 62 cm.	1p 2p 2p
2.	*a)* $A_{ABCD}=L\cdot l$ $A_{ABCD}=10800$ m^2	1p 4p
	b) $R_{peluza}=60$ m $A_{peluze}=3600\pi$ m^2 $\pi>3{,}14\Rightarrow A_{peluze}>3600\cdot 3{,}14$ m$^2=11304$ m^2, deci $A_{peluze}>A_{teren}$	1p 2p 2p
	c) $A_{\Delta MAC}=2700$ m^2 $AC=150$ m, $AM=30\sqrt{13}$ m $A_{\Delta MAC}=\frac{AC\cdot AM\cdot\sin(\sphericalangle MAC)}{2}\Rightarrow\sin(\sphericalangle MAC)=\frac{6\sqrt{13}}{65}$	1p 2p 2p

Testul 47

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	35	24	4	15	256	4
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează trunchiul de piramidă Notează trunchiul de piramidă	4p 1p
2.	$5\cdot 3{,}4$ lei $=17$ lei costă caietele $2\cdot 5{,}5$ lei $=11$ lei costă pixurile 50 lei $-$ 28 lei $=22$ lei primește rest	2p 2p 1p
3.	$T+P+M=16$ $T=2P$, $P=M$ $4P=16\Rightarrow P=4$ $T=2\cdot 4=8$ ani	1p 2p 1p 1p
4.	*a)* $\Delta=4$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $S=\{-3;-1\}$ *b)* $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$ $E(x)=x$	2p 1p 2p 2p 2p 1p 1p
5.	$A(x;y)\in G_f\Leftrightarrow f(x)=y$ $y=3x\Rightarrow f(x)=3x$ $x+1=3x\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	1p 1p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* $A_{ABCD}=L\cdot l$ $A_{ABCD}=144$ dm^2	1p 4p
	b) $AC=l\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ dm $OA=\frac{AC}{2}=6\sqrt{2}$ dm	3p 2p
	c) $A_{hasurată}=72\pi-144$ dm^2 $\pi<3{,}15\Rightarrow A_{hașurată}<72\cdot 3{,}15-144$ dm$^2=82{,}8$ dm^2, deci $A_{hasurată}<A_{ABCD}$.	3p 2p
2.	*a)* ΔECD echilateral $\Rightarrow h=\frac{l\sqrt{3}}{2}\Rightarrow l=2\sqrt{3}$ m $\Rightarrow R=\sqrt{3}$ m $V_{cilindru}=6\pi$ m^3, $V_{con}=3\pi$ m^3 $V=9\pi$ m^3	2p 2p 1p
	b) $A_l=\pi Rg+2\pi RG$ m^2 $A_l=2\pi(3+2\sqrt{3})$ m^2	2p 3p

	c) $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{2,5\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{masa}{9\pi\ \text{m}^3}$	2p
	$masa = 22,5\pi$ kg	1p
	$\pi > 3,14 \Rightarrow masa > 22,5 \cdot 3,14$ kg $= 70,65$ kg, deci 70 kg de material nu sunt suficiente	2p

Testul 48

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-1	0;5	-4	100π	33	4 ian.
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează conul	4p
	Notează conul	1p
2.	$6(x-1)^2 + 6x^2 = 13(x^2 - x)$	2p
	$x^2 - x - 6 = 0$	1p
	$x_1 = 3, x_2 = -2$	2p
3.	$\lvert x - 2y\rvert \geq 0, (x-2)^2 \geq 0$	2p
	$x = 2y, x = 2$	2p
	$y = 1$	1p
4.	*a)* $f(0) = 3$; $f(-1) = -1$;	3p
	Trasează corect graficul	2p
	b) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2} + 3$	2p
	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + 3$	2p
	$a = 5 \in \mathbb{N}$	1p
5.	$x^2 - 3x = y$	2p
	$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 4) + 4 = y^2 + 4y + 4$	2p
	$y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2 = (x^2 - 3x + 2)^2$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $66\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 33\ m$	3p
	$A = 6600 m^2$	2p
	b) Ariile celor două semicercuri sunt egale, iar împreună formează un cerc de rază 33, deci aria lor este 1089π m^2	4p
	Aria terenului este $6600 + 1089\pi$ m^2	1p
	c) $l_{pista} = 200 + 66\pi$ metri	3p
	$33\pi > 33 \cdot 3,1 = 102,3 > 100$, deci lungimea pistei este mai mare de 400 m	2p
2.	*a)* $V = L \cdot l \cdot h$;	2p
	$V = 24000\ l$	3p
	b) $A_b = \pi R^2$	2p
	$A_b = 4\pi$ m^2	3p

	c) $V_{cilindru} = 4\pi \cdot h$	2p
	$4\pi \cdot h \geq 24 \Rightarrow h \geq \frac{6}{\pi}$	1p
	$h_{minim} = 2$ m	2p

Testul 49

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	1	6	$\frac{7}{5}$	$16\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$	9
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$-12 < 3x + 9 < 12$	2p
	$-7 < x < 1$	2p
	$A = \{-6, -5, ..., 0\}$	1p
3.	$x^2 - 13x = -12$	2p
	$x_1 = 1; x_2 = 12$	2p
	Convine $x = 12$	1p
4.	*a)* $f(-3) = 7$	2p
	$-3a - 2 = 7$	2p
	$a = -3$	1p
	b) $A(0,-2), B(-1,1) \in G_f$	2p
	Trasează corect dreapta AB	3p
5.	Desface corect parantezele	3p
	$n = 12 \in \mathbb{N}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* Se aplică teorema lui Pitagora în ΔABF	2p
	$AF = 50$ m	3p
	b) $A_{ADCF} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$	1p
	$A_{ADCF} = 1000$ m^2	4p
	c) $A_{hașurată} = A_{\overline{BC}} - A_{\overline{EF}}$	1p
	$A_{hașurată} = 150\pi$ m^2	2p
	$\pi < 3,15 \Rightarrow A_{hașurată} < 150 \cdot 3,15$ m$^2 = 472,5$ m$^2 < 473$ m^2.	2p
2.	*a)* $VO = OO' - VO' = 6$ dm	1p
	Din teorema lui Pitagora în $\Delta VON \Rightarrow VN = 2\sqrt{13}$ dm	4p
	b) $A_l = \pi R(G + R)$	1p
	$A_l = 8\pi(\sqrt{13} + 2)$ dm^2	4p
	c) $V = V_{cub} - V_{con}$	1p

	$V = 512 - 32\pi$ dm^3 $\pi > 3{,}14 \Rightarrow 32\pi > 100{,}48 \Rightarrow -32\pi < -100{,}48 \mid +512 \Rightarrow V < 411{,}2$ dm^3 < 412 dm^3.	2p 2p

Testul 50

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	3	2	1, 4 sau 9	180	5	Joi
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul Notează cubul	4p 1p
2.	$x^2 - 3x = 3x - 5$ $x_1 = 1, x_2 = 5$	3p 2p
3.	$x - \frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{2}$ $x = 12$	3p 2p
4.	*a)* $A(1,4), B(2,2) \in G_f$ Trasează corect graficul funcției	2p 3p
	b) $f(m) = -2m + 6 = -5$ $m = \frac{11}{2}$	3p 2p
5.	$a = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4} + 4 - 2\sqrt{3} + 4$ $a = 16 = 4^2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* Se aplică teorema lui Pitagora în ΔABC $BC = 6$ m	2p 3p
	b) ΔBCE isoscel $m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ \Rightarrow \Delta BCE$ echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle BCE) = 60^\circ$	2p 3p
	c) $A_{ACDE} = 9\sqrt{3}$ m^2 $\sqrt{3} < 1{,}74 \Rightarrow A_{ACDE} < 15{,}66$ m^2, deci 16 m^2 sunt suficienți	2p 3p
2.	*a)* $2R + h = 40$ cm $R = l = \frac{1}{3}h$ $h = 24$ cm, $R = 8$ cm	1p 1p 3p
	b) $V = V_{sfera} + V_{prisma}$ $V = \frac{2048\pi}{3} + 1536$ cm^3	1p 4p
	c) 400 g $\cdot$ 11 = 4400 g=4,4 kg 4,4 kg costă 143 lei	2p 3p